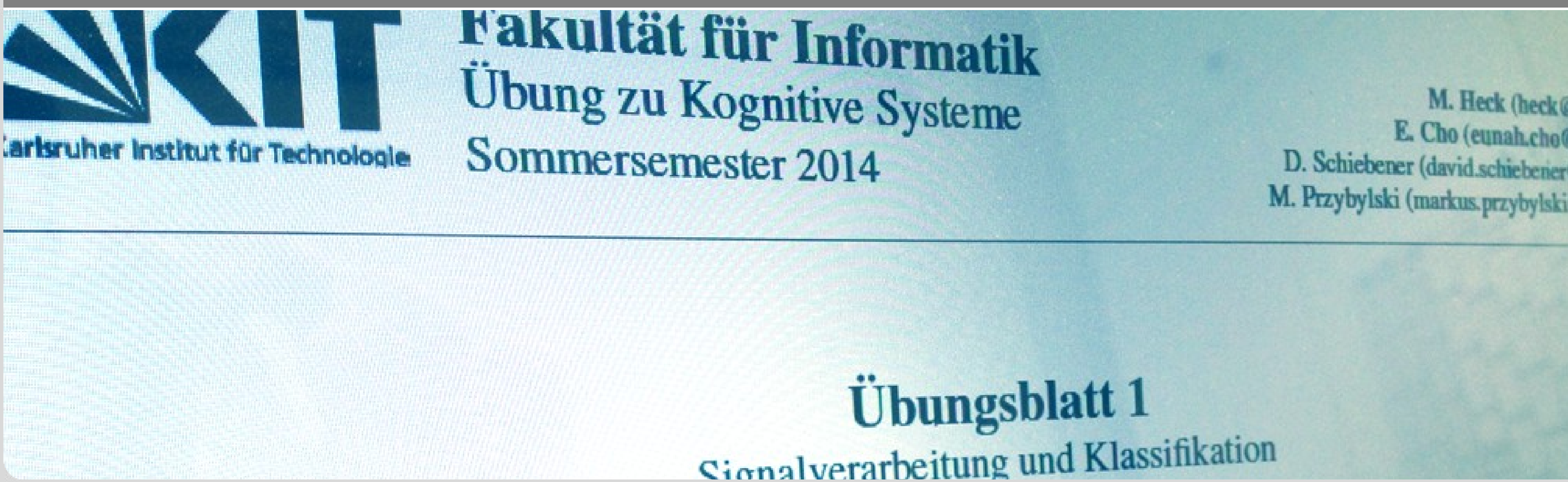
Sie können Ihre Übungsblätter vorne in den „Abgabe“-Karton legen

Kognitive Systeme – Übung 1

07.06.2017 – Signalverarbeitung

Matthias Sperber, Thai Son Nguyen

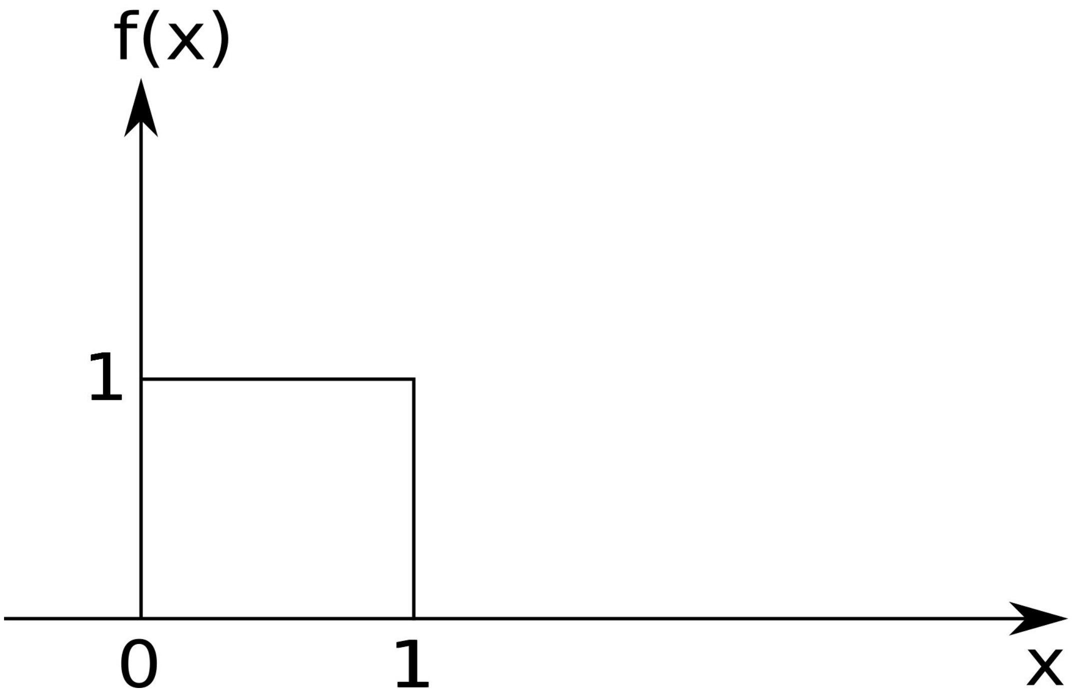
KIT, Institute for Anthropomatics and Robotics, Department of Informatics, Interactive Systems Laboratories



- Aufgabe 1: Faltung
- Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
- Aufgabe 3: Filtern
- Aufgabe 4: Diskrete Fouriertransformation, Sampling

Aufgabe 1: Faltung
a) rechnerische Faltung

- Bestimmen Sie die Faltung $f(x) * f(x)$ rechnerisch

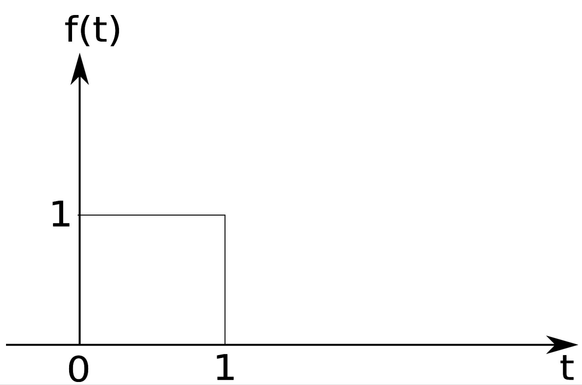


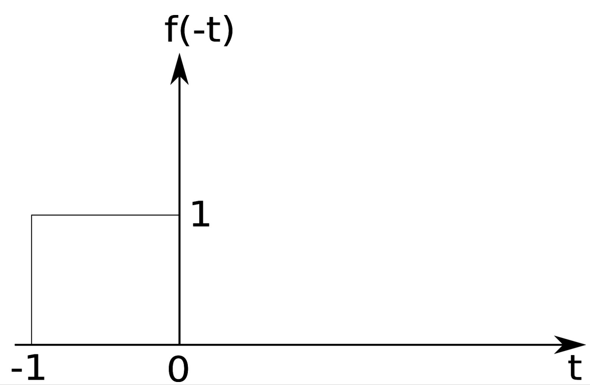
$$f(x) = \begin{cases} 1, wenn\ x \leq 1 \\ 0, sonst \end{cases}$$

Aufgabe 1: Faltung
a) rechnerische Faltung

$$f(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(x-t) dt$$

- 4 Fallunterscheidungen:
  - $x < 0$
  - $0 \leq x < 1$
  - $1 \leq x \leq 2$
  - $2 < x$

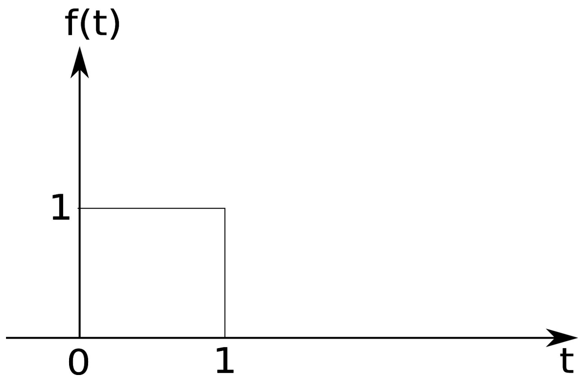


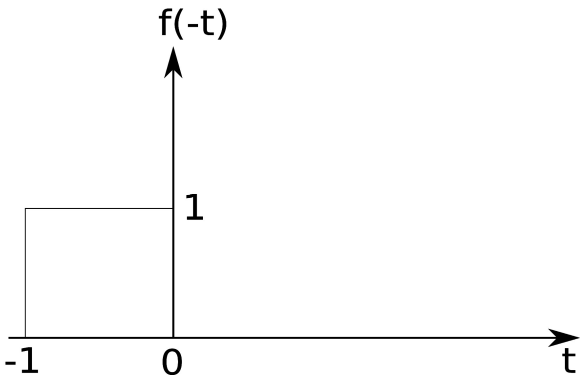


Aufgabe 1: Faltung

a) rechnerische Faltung

- Fall 1+4: $x < 0 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(x-t)dt = 0$

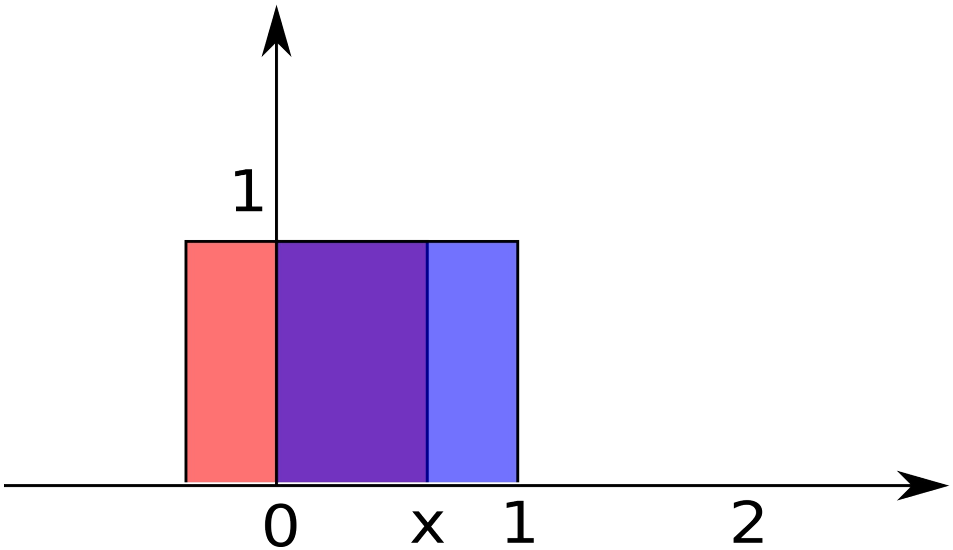




Aufgabe 1: Faltung
a) rechnerische Faltung

- Fall 2: $0 \leq x < 1 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(x-t)dt$

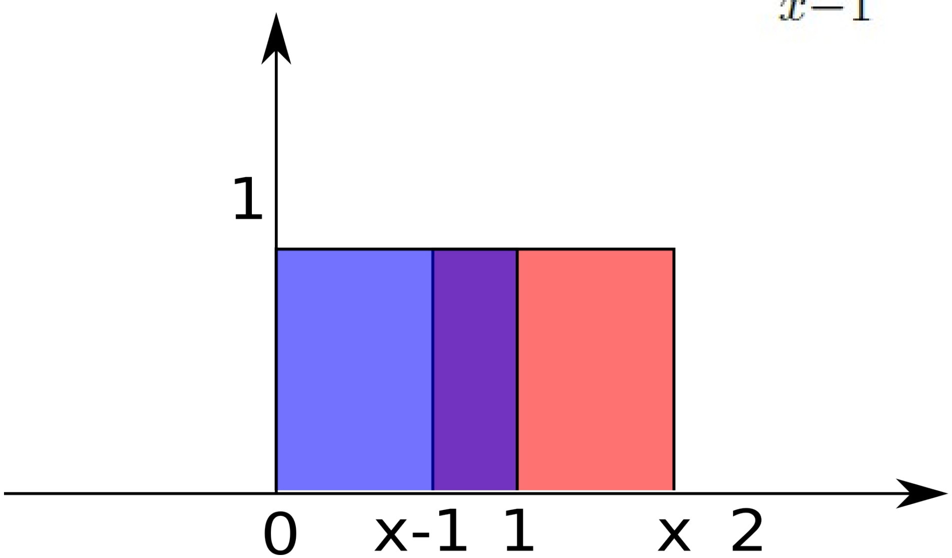
$$= \int_{0}^{x} 1dt = x$$



Aufgabe 1: Faltung
a) rechnerische Faltung

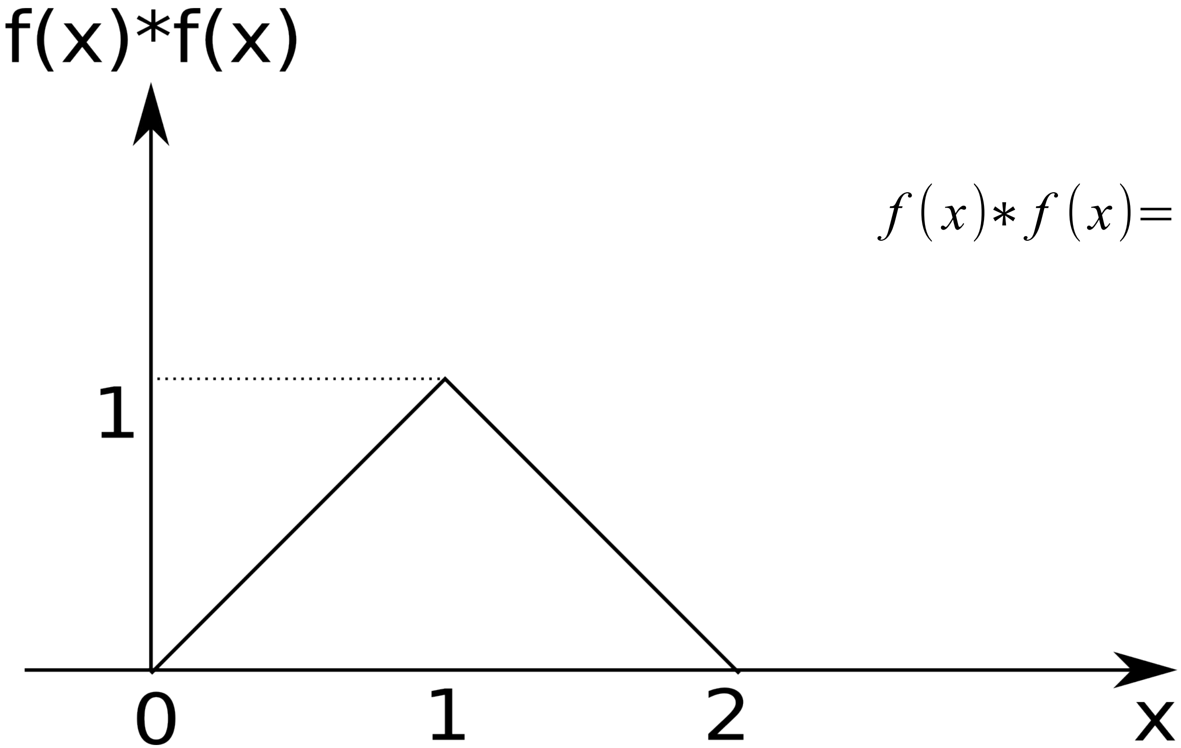
- Fall 3: $1 \leq x \leq 2 \quad \rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(x-t) dt$

$$= \int\limits_{x-1}^{1} 1 dt = -x + 2$$



Aufgabe 1: Faltung
a) rechnerische Faltung

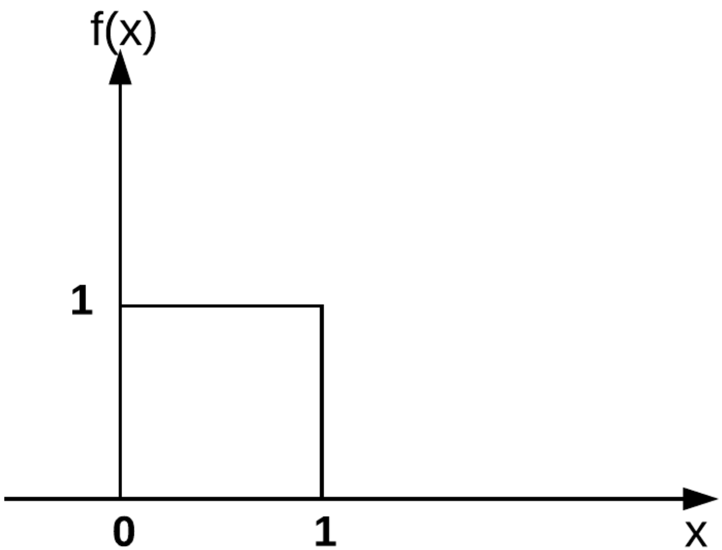
- Lösung:

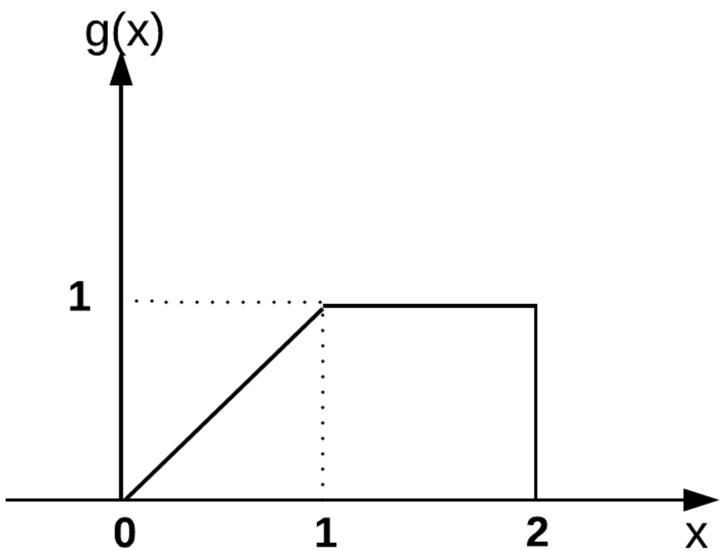


$$f(x)*f(x)=\begin{cases} x, \ wenn\ 0 \le x < 1 \\ -x+2, \ wenn\ 1 \le x \le 2 \\ 0, \ sonst \end{cases}$$

b) graphische Faltung

- Bestimmen Sie die Faltung $f(x) * g(x)$ graphisch





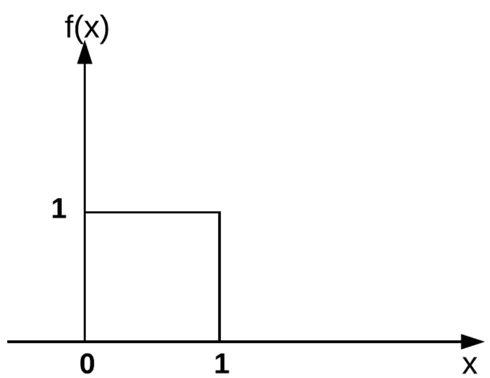
Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

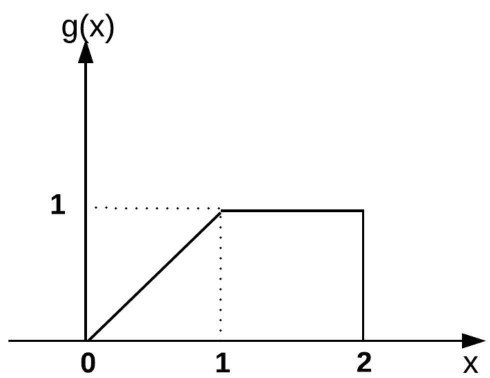
- Nur für einfache Funktionen möglich
- Vorgehen
  - Spiegelung der ersten Funktion
  - Verschiebung der Funktion ins „Negative“, bis Funktionen sich nicht mehr überlappen (Faltung ist 0)
  - Schrittweise Verschiebung der Funktion nach rechts und Berechnung des aktuellen Werts der Faltung
  - Flächeninhalt der multiplizierten Funktionswerte

Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t) dt$$

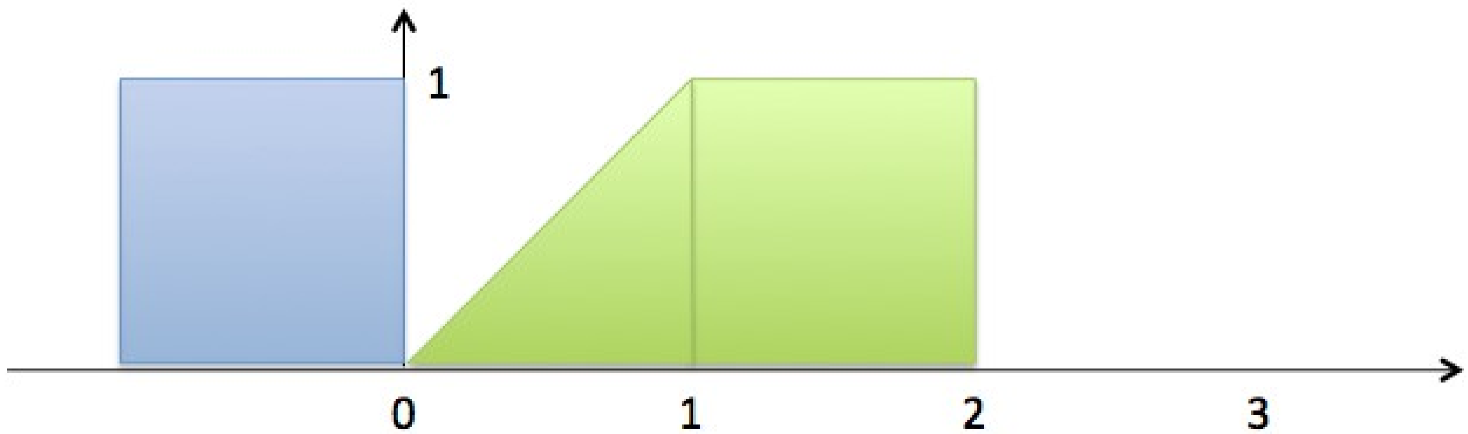
- 5 Fallunterscheidungen:
  - $x < 0$
  - $0 \leq x < 1$
  - $1 \leq x < 2$
  - $2 \leq x < 3$
  - $3 \leq x$





Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

- Fall 1: $x < 0 \quad \rightarrow \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t)dt = 0$

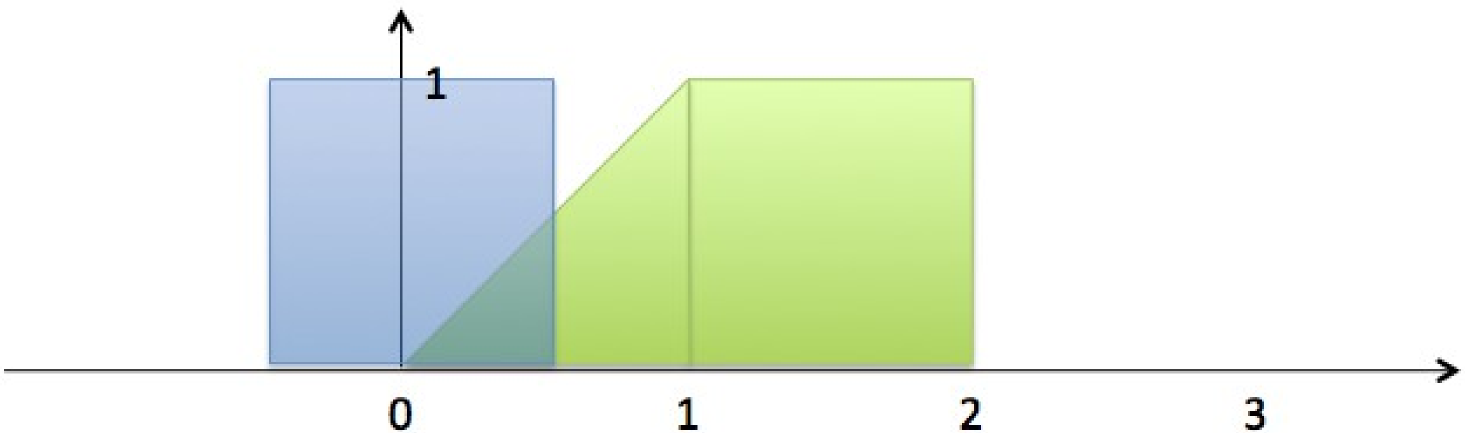


Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

- Fall 2:

$$0 \leq x < 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t)dt$$

$$= \int_{0}^{x} t \cdot dt = \frac{x^2}{2}$$



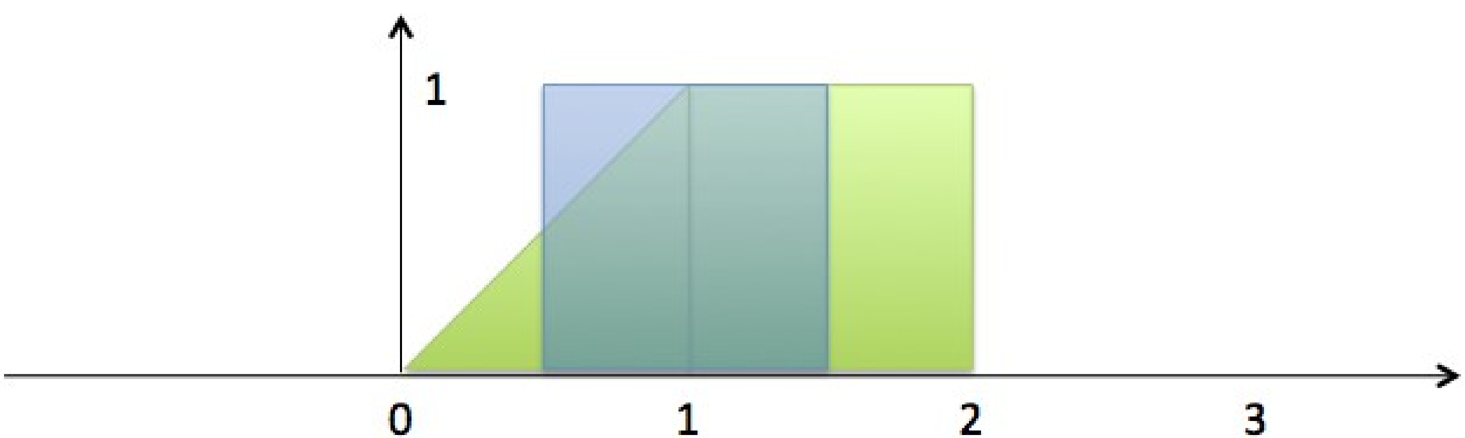
Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

- Fall 3:

$$1 \leq x < 2 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t)dt$$

$$= \int_{x-1}^{1} t \cdot dt + \int_{1}^{x} 1 \cdot dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^{1} + x - 1 = \frac{-x^2}{2} + 2x - 1$$



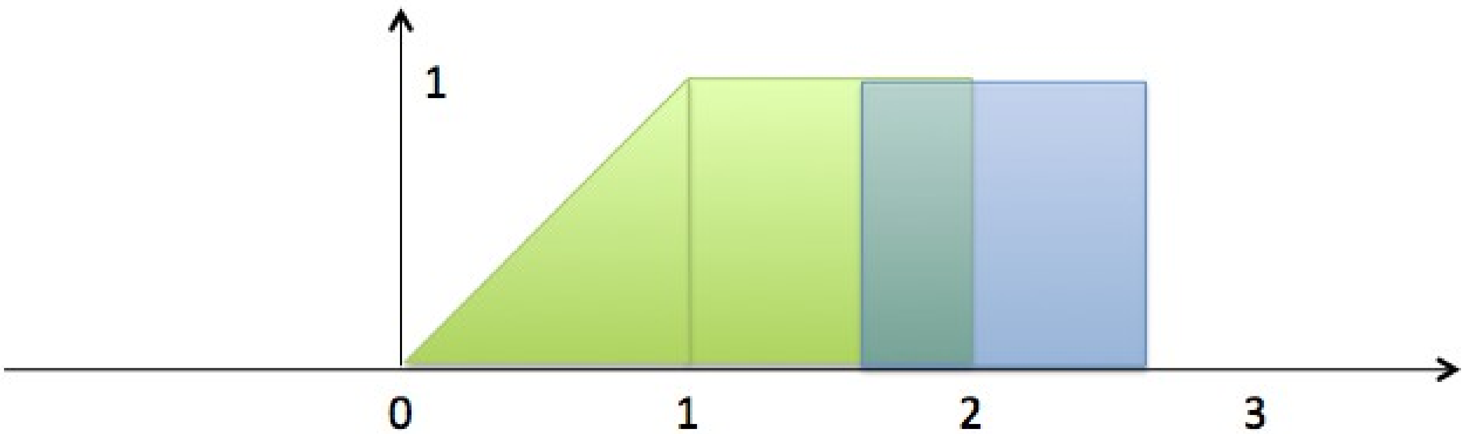
b) graphische Faltung

- Fall 4:

$$2 \leq x < 3 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t)dt$$

$$= \int_{x-1}^{2} 1 \cdot dt$$

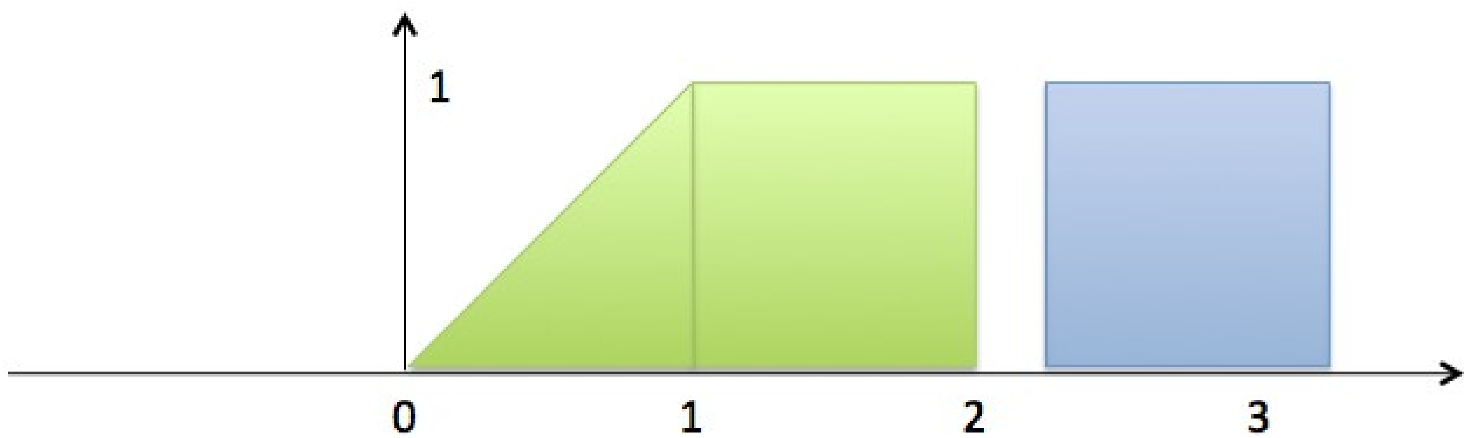
$$= t_{x-1}^{2} = -x + 3$$



Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

- Fall 5:

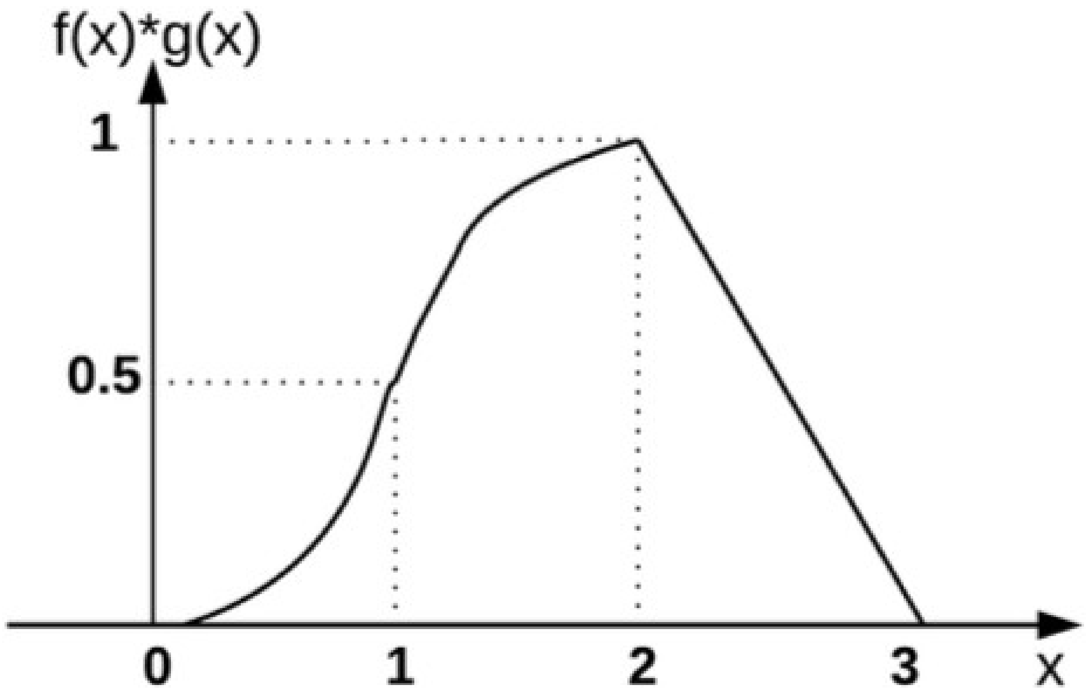
$$x \geq 3 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f(x-t)dt = 0$$



Aufgabe 1: Faltung
b) graphische Faltung

- Lösung:

$$f(x)*g(x)=\begin{cases} 0.5\mathrm{x}^{2,} \, wenn \; 0 \le x < 1 \\ 0.5\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 1, wenn \; 1 \le x < 2 \\ -x+3, wenn \; 2 \le x < 3 \\ 0, sonst \end{cases}$$

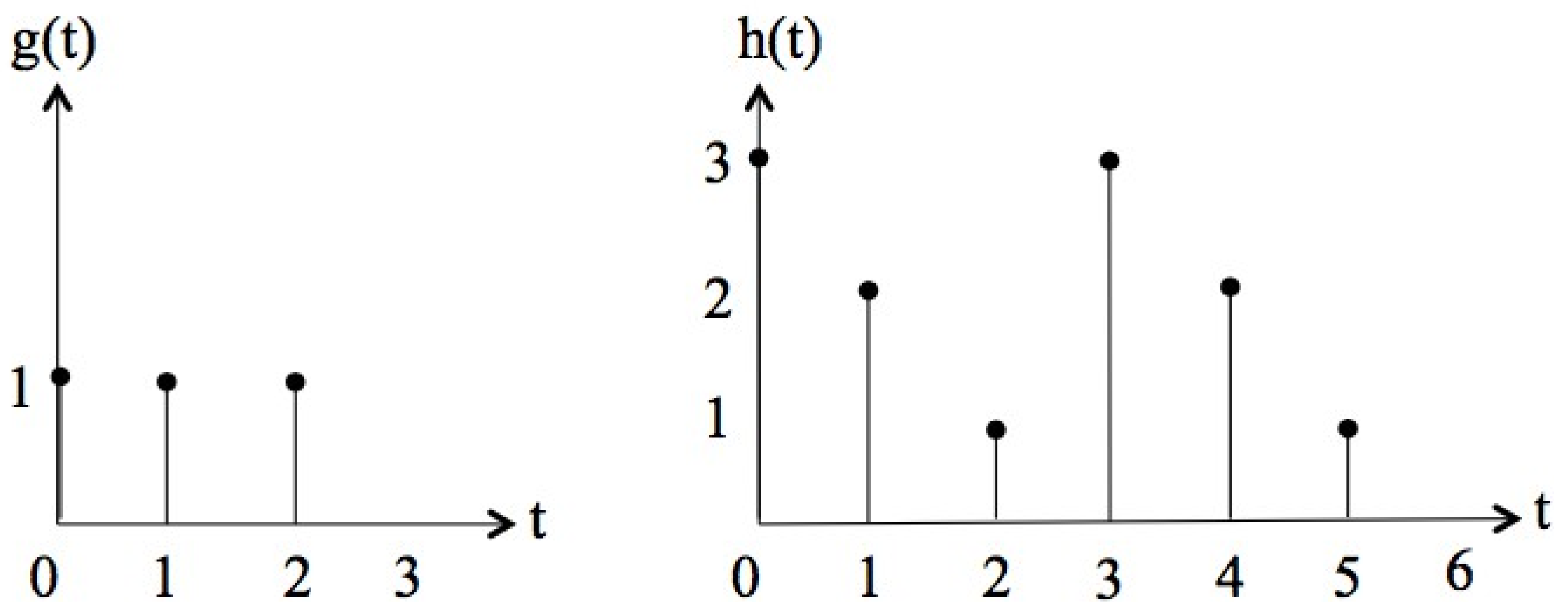


Aufgabe 1: Faltung
c) diskrete Faltung

Gegeben seien die beiden Funktionen $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \le t < 3 \\ 0 & \text{für} \quad \text{sonst} \end{cases}, \qquad h(t) = \begin{cases} 3-t & \text{für} \quad 0 \le t < 3 \\ 6-t & \text{für} \quad 3 \le t < 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

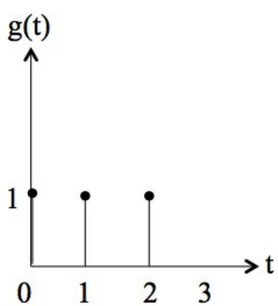
Bestimmen Sie grafisch die diskrete Faltung $u[t] = g[t] * h[t]$.

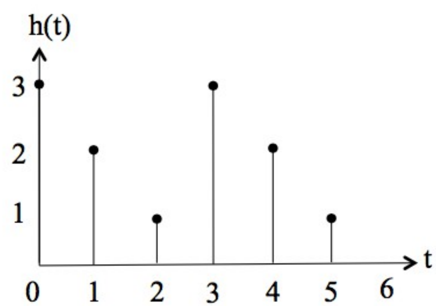


Aufgabe 1: Faltung
c) diskrete Faltung

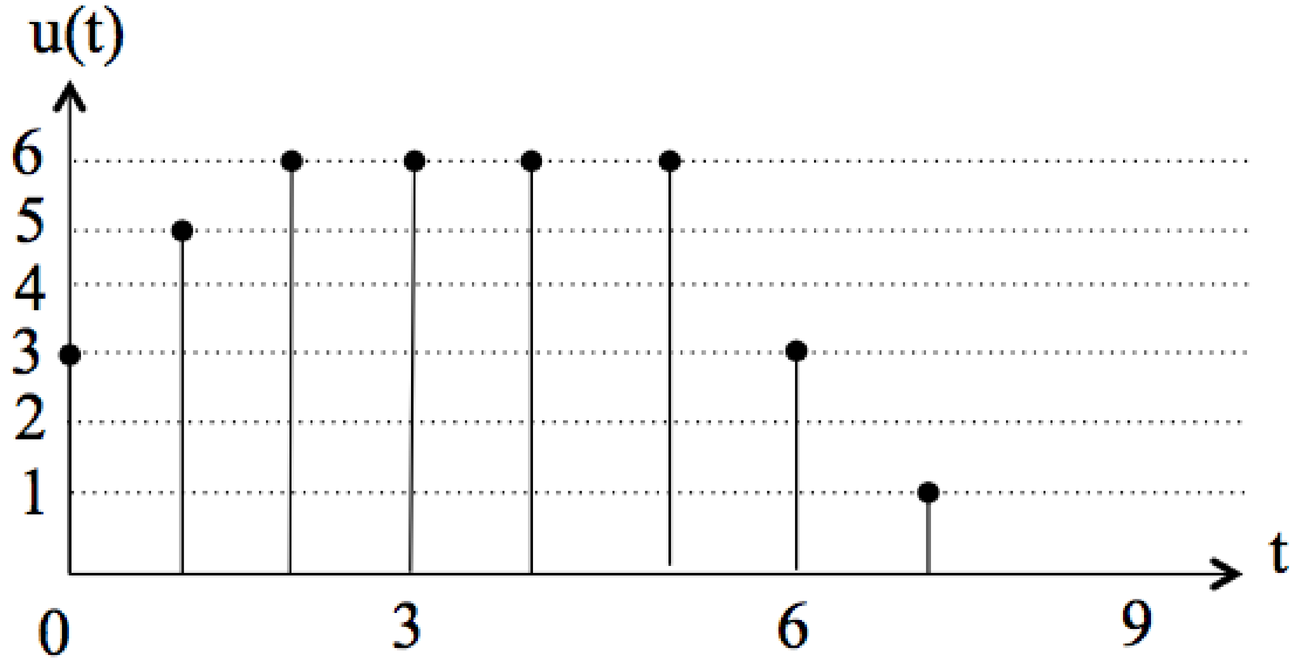
$$u[x] * h[x] = \sum_{t=\infty}^{\infty} u[t] \cdot h[x-t]$$

$$u[0] = 1 \cdot 3 = 3$$
$$u[1] = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 5$$
$$u[2] = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6$$
$$u[3] = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 6$$
$$u[4] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 6$$
$$u[5] = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6$$
$$u[6] = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3$$
$$u[7] = 1 \cdot 1 = 1$$





Aufgabe 1: Faltung
c) diskrete Faltung



- **Onlinefrage 1, größter Wert der Faltung: 6**

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
a) Abtastung mit 60 Hz

- Zeichnen Sie das komplexe Spektrum

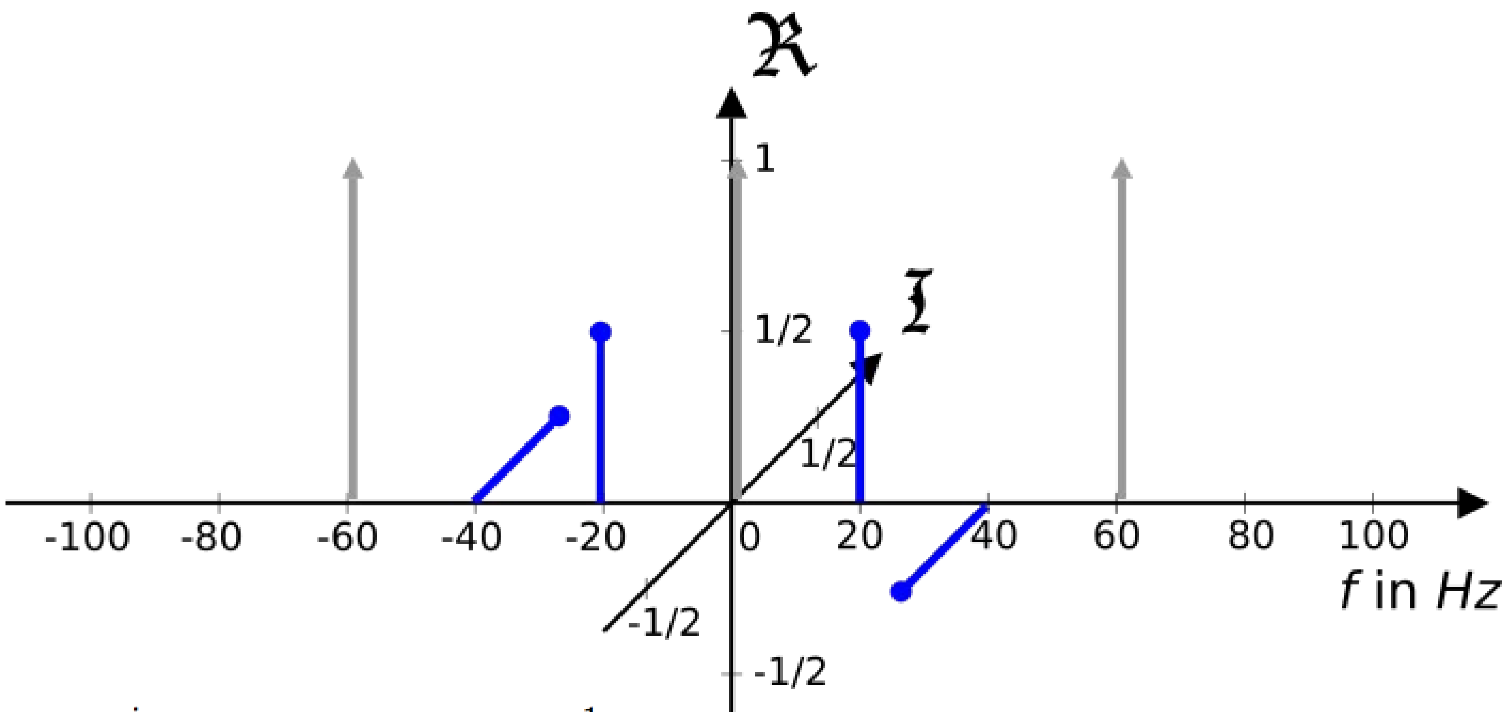
gegeben: $f(x) = \sin(2\pi 40 t) + \cos(2\pi 20 t)$

$$\begin{aligned} F(f) &= \frac{i}{2} \cdot (\delta(f+40) - \delta(f-40)) + \frac{1}{2} \cdot (\delta(f+20) + \delta(f-20)) \\ &= \frac{i}{2} \cdot \delta(f+40) - \frac{i}{2} \cdot \delta(f-40) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f+20) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f-20) \end{aligned}$$

Funktion	Fouriertransformierte
$\sin(2\pi f_0 \cdot t)$	$\frac{i}{2}(\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0))$
$\cos(2\pi f_0 \cdot t)$	$\frac{1}{2}(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0))$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-k/T)$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
a) Abtastung mit 60 Hz

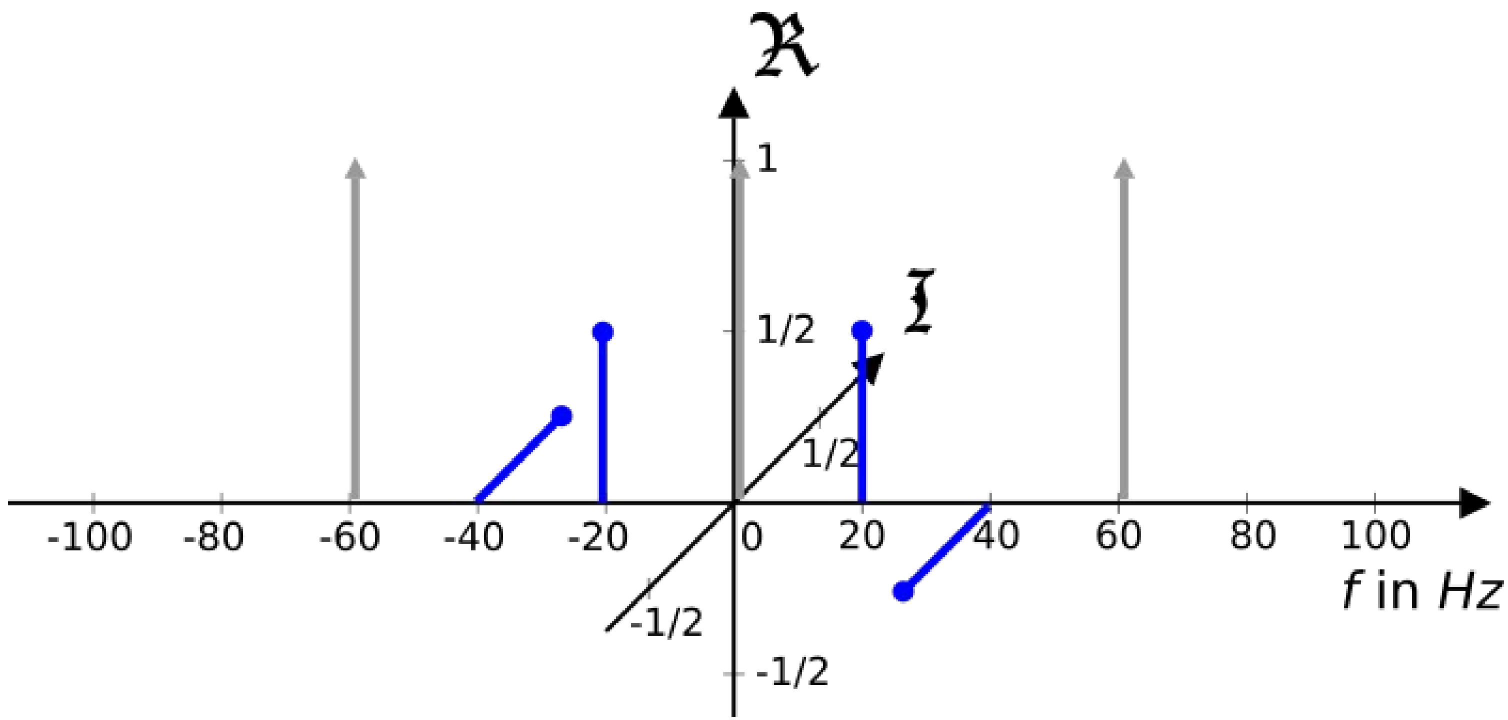
- komplexes Spektrum und Impulsfolge (60 Hz)



$$
\begin{aligned}
F(f) &= \frac{i}{2} \cdot (\delta(f+40) - \delta(f-40)) + \frac{1}{2} \cdot (\delta(f+20) + \delta(f-20)) \\
&= \frac{i}{2} \cdot \delta(f+40) - \frac{i}{2} \cdot \delta(f-40) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f+20) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f-20)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
a) Abtastung mit 60 Hz

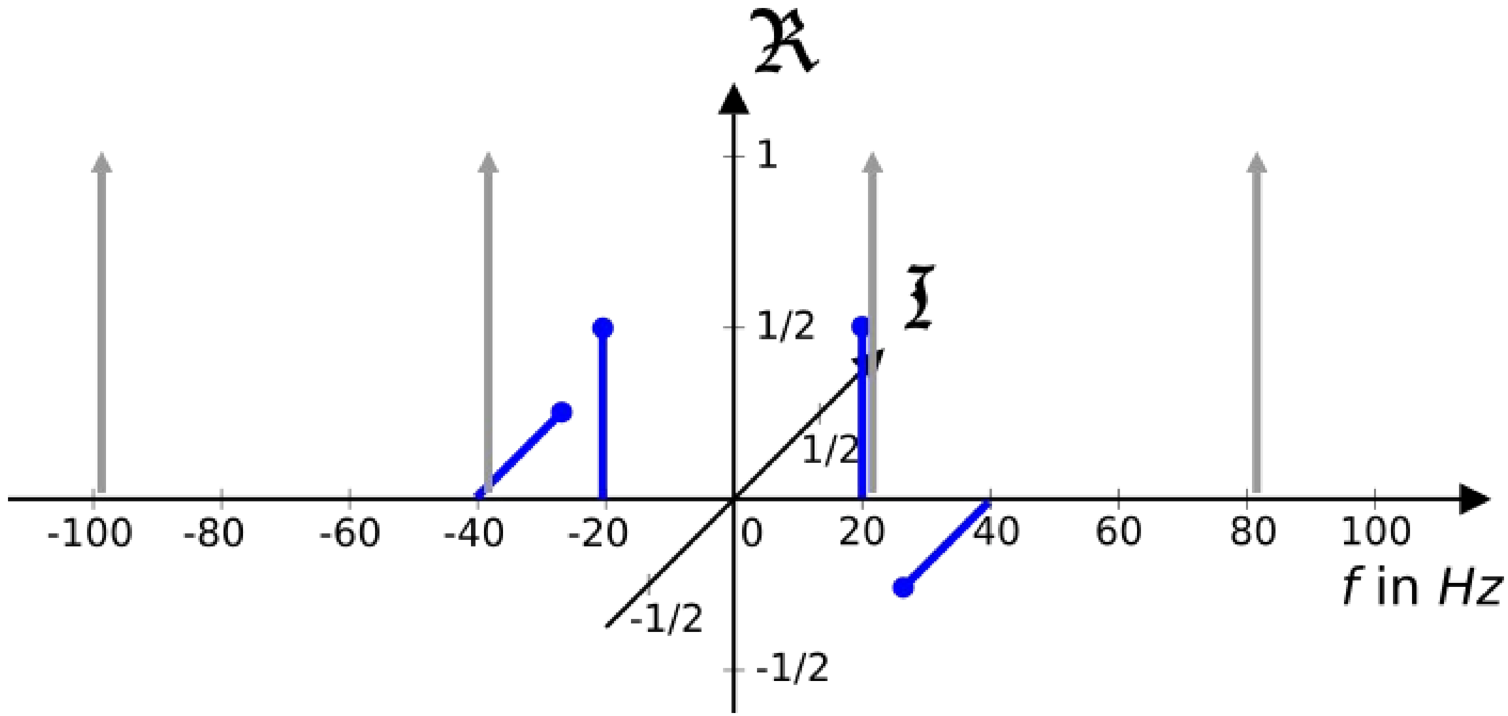
- Verschiebung um 0 Hz



$$F(0) * \delta(0) = 0$$

a) Abtastung mit 60 Hz

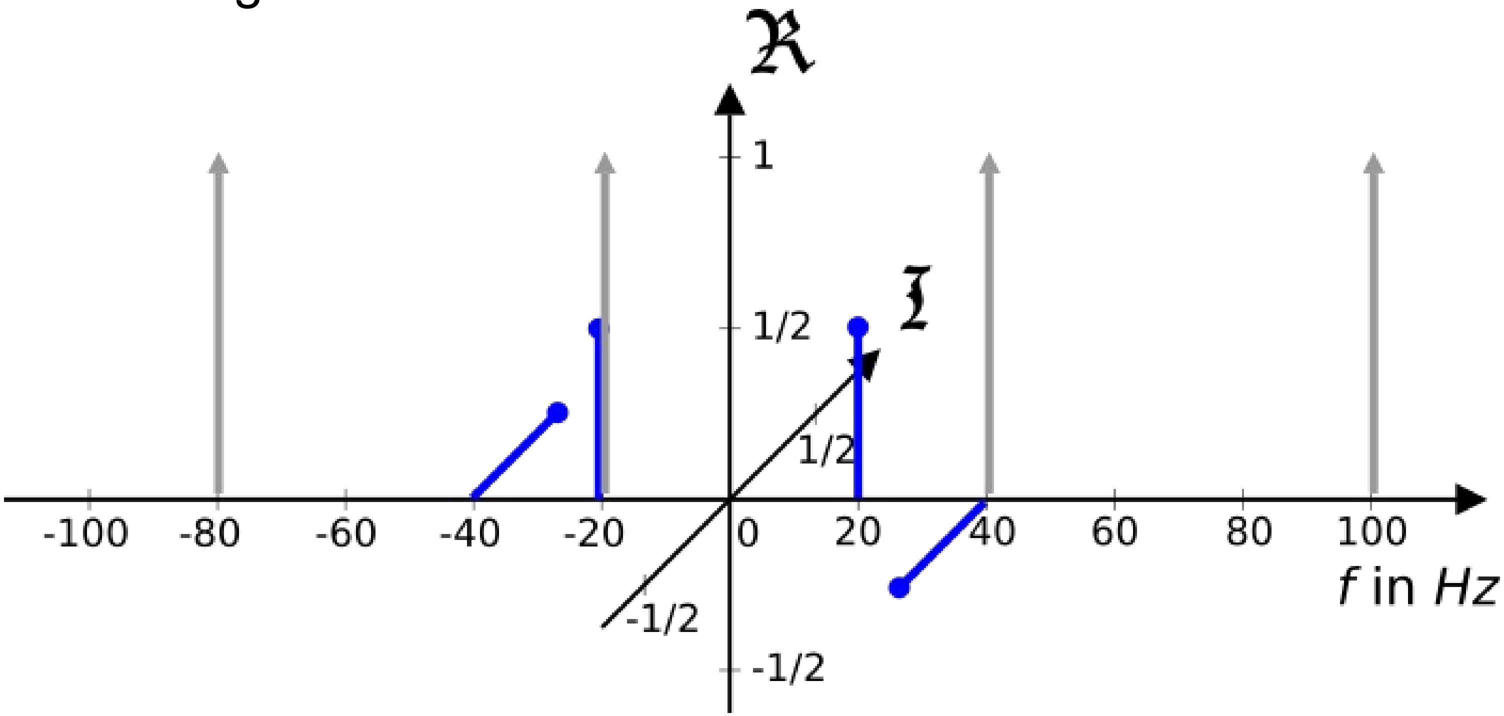
- Verschiebung um 20 Hz



$$(F * \delta)(f_o = 20) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T} + \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{2T} + \frac{i}{2T}$$
$$(F * \delta)(f_o = -40) = (F * \delta)(f_o = 20) = (F * \delta)(f_o = 80)$$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
a) Abtastung mit 60 Hz

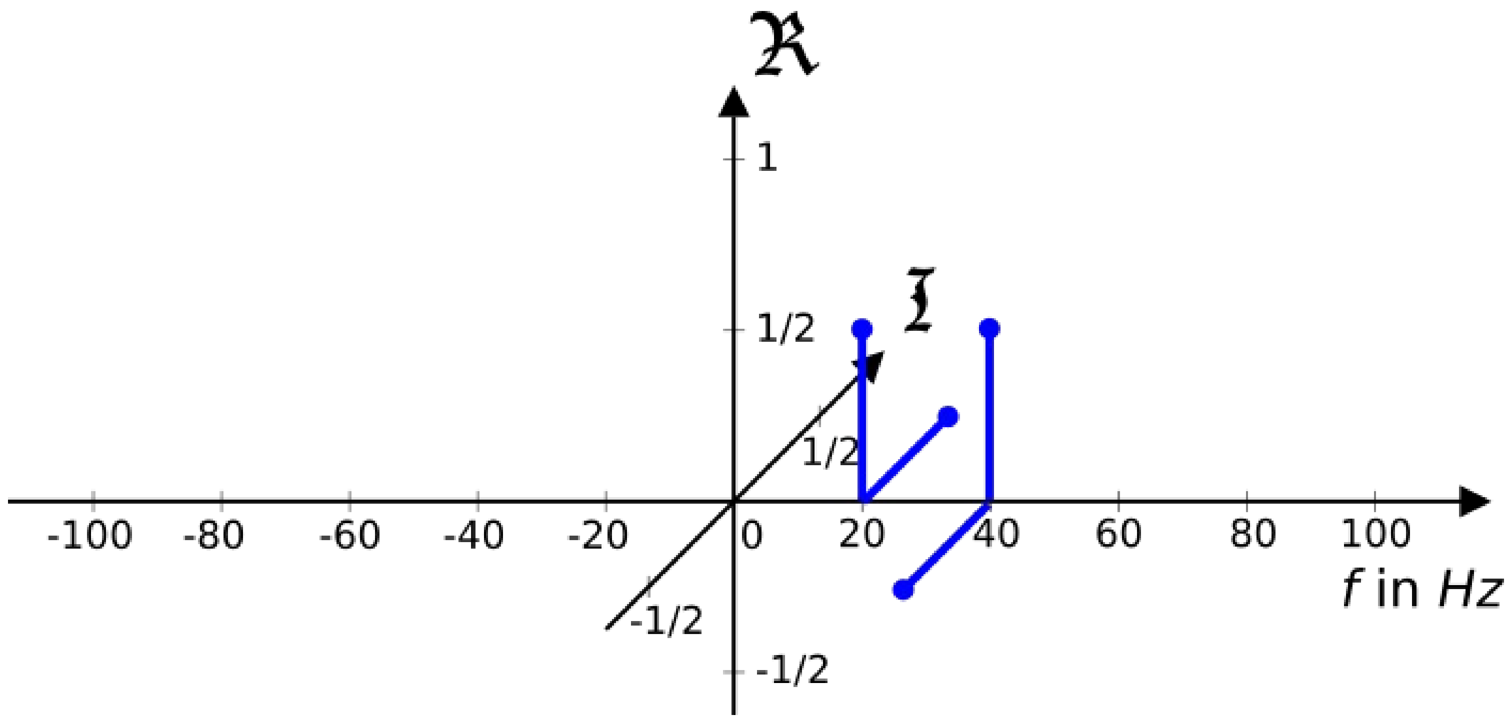
- Verschiebung um 40 Hz



$$(F * \delta)(f_o = 40) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T} - \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{2T} - \frac{i}{2T}$$
$$(F * \delta)(f_o = -20) = (F * \delta)(f_o = 40) = (F * \delta)(f_o = 100)$$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
a) Abtastung mit 60 Hz

- komplexes Spektrum nach der Abtastung



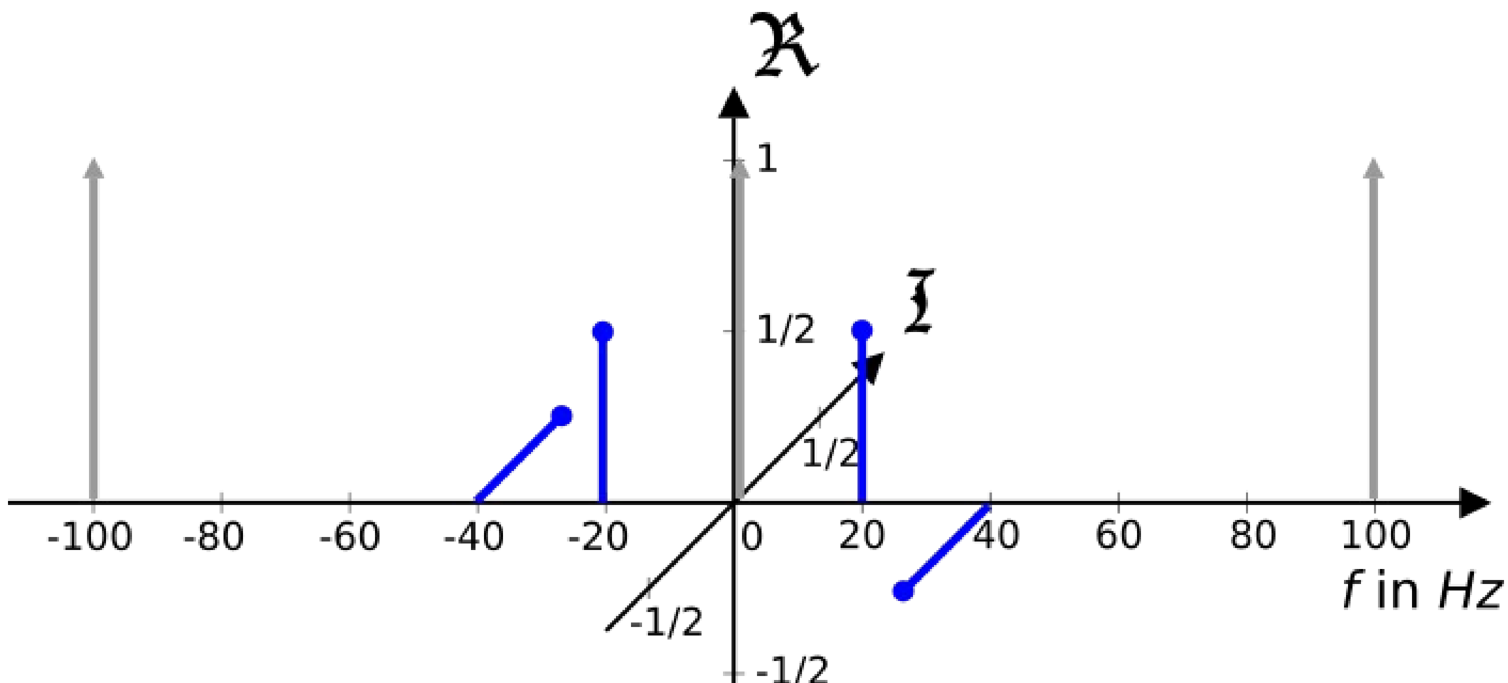
Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
b) Aliasing

- Es tritt Aliasing auf: Sich wiederholende Spektren überlagern sich
- Abtastfrequenz 60 Hz zu klein gewählt: Verletzung des Abtasttheorems
- Hier: Überlagerung der Frequenzen des Realteils und Imaginärteils
- Weitere denkbare Effekte:
  - Auftreten von im Originalsignal nicht vorhandener Frequenzen
  - Verschwinden von im Originalsignal vorhandenen Frequenzen
- Signal kann nicht mehr fehlerfrei rekonstruiert werden

- **Um Aliasing zu verhindern, muss als Abtastfrequenz eine Frequenz gewählt werden, die <u>echt größer</u> ist als das 2-fache der höchsten Frequenz im Signal**

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
c) Abtastung mit 100 Hz

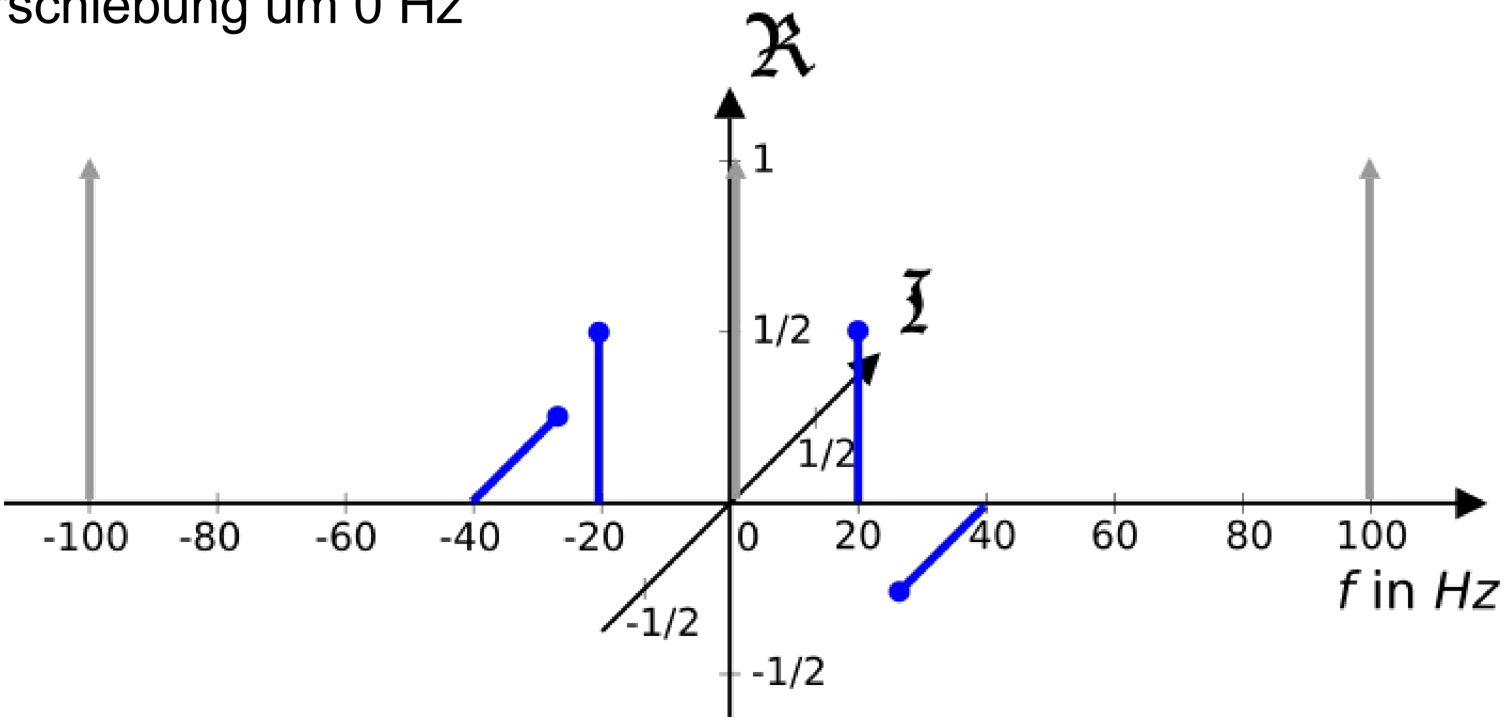
- komplexes Spektrum und Impulsfolge (100 Hz)



$$
\begin{aligned}
F(f) &= \frac{i}{2} \cdot (\delta(f+40) - \delta(f-40)) + \frac{1}{2} \cdot (\delta(f+20) + \delta(f-20)) \\
&= \frac{i}{2} \cdot \delta(f+40) - \frac{i}{2} \cdot \delta(f-40) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f+20) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f-20)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
c) Abtastung mit 100 Hz

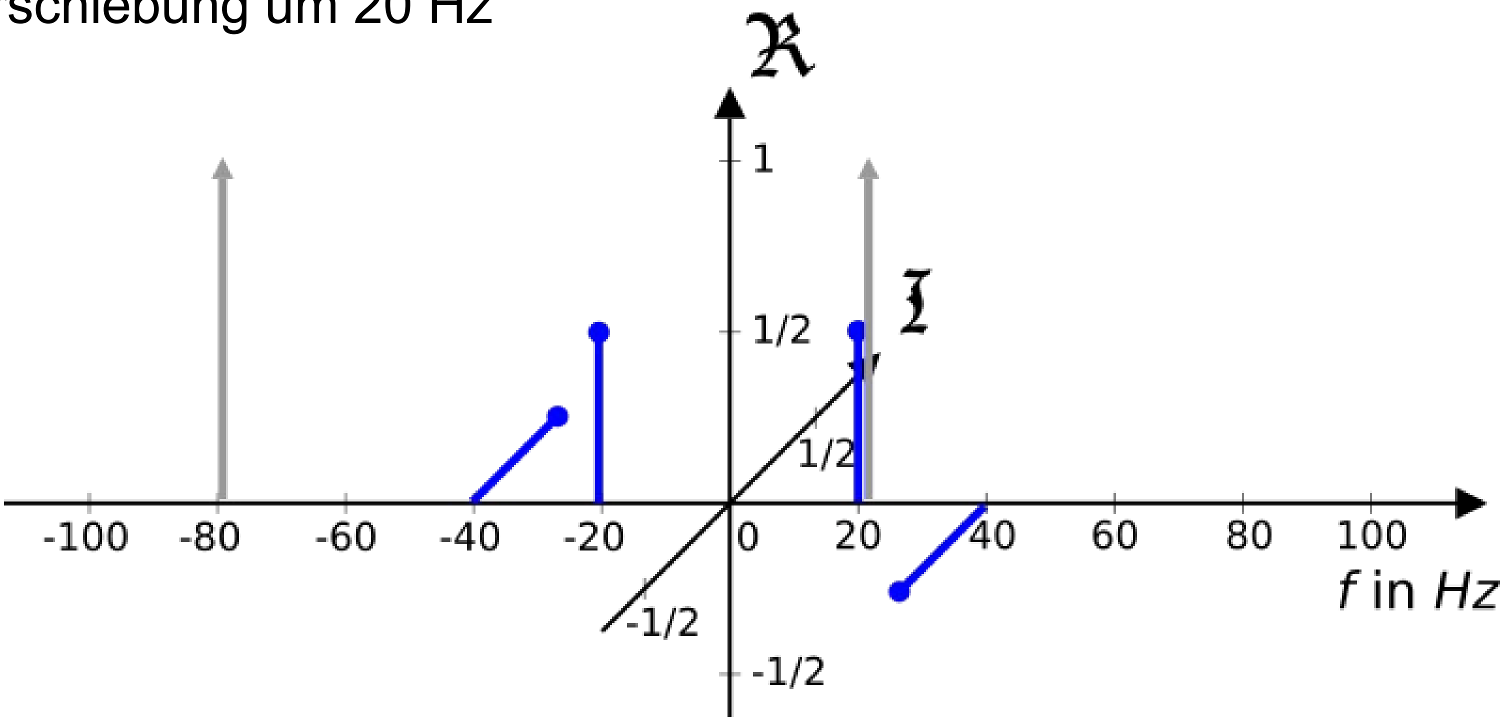
- Verschiebung um 0 Hz



$$F(0) * \delta(0) = 0$$

c) Abtastung mit 100 Hz

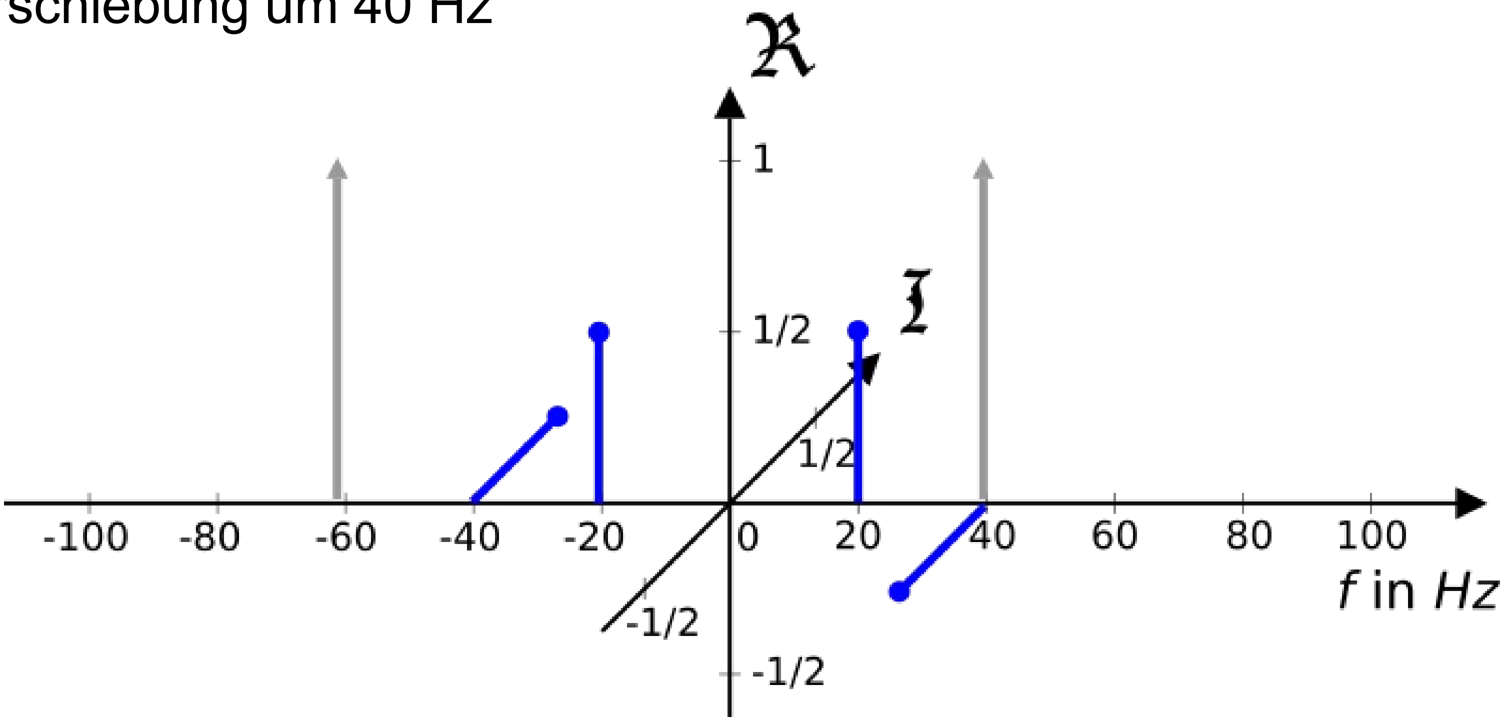
- Verschiebung um 20 Hz



$$(F * \delta)(f_o = 20) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{2T}$$
$$(F * \delta)(f_o = -80) = (F * \delta)(f_o = 20) = (F * \delta)(f_o = 120)$$

c) Abtastung mit 100 Hz

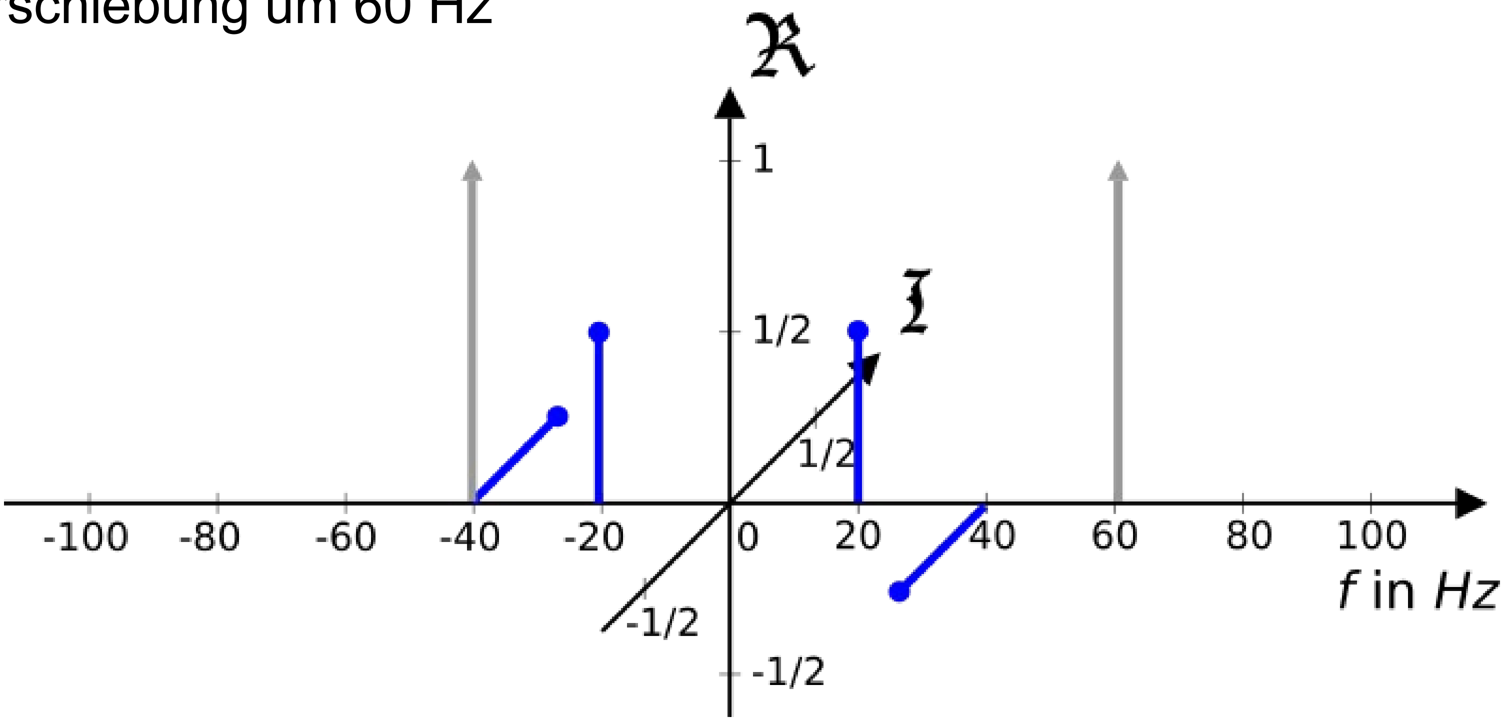
- Verschiebung um 40 Hz



$$(F * \delta)(f_o = 40) = -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{T} = -\frac{i}{2T}$$
$$(F * \delta)(f_o = -60) = (F * \delta)(f_o = 40) = (F * \delta)(f_o = 140)$$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
c) Abtastung mit 100 Hz

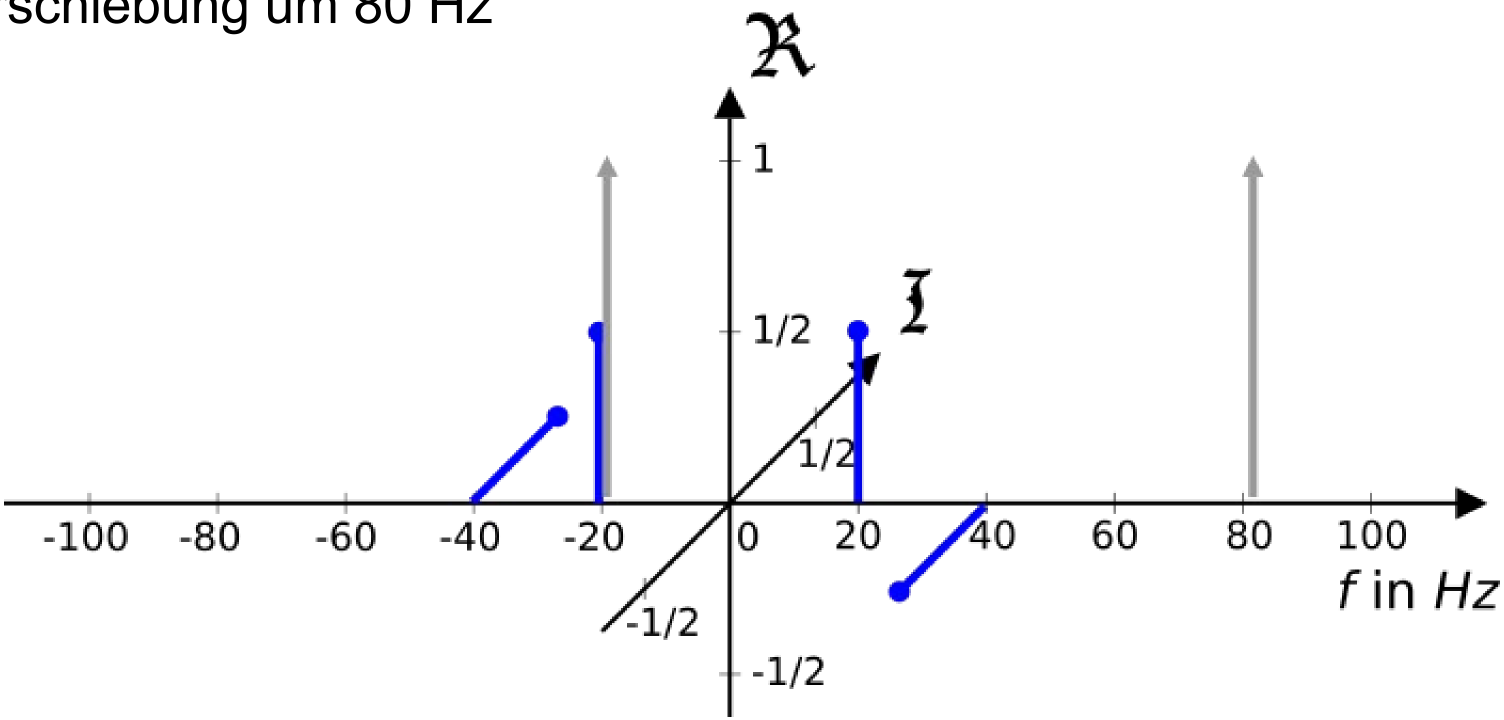
- Verschiebung um 60 Hz



$$(F * \delta)(f_o = 60) = \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{i}{2T}$$
$$(F * \delta)(f_o = -40) = (F * \delta)(f_o = 60) = (F * \delta)(f_o = 160)$$

c) Abtastung mit 100 Hz

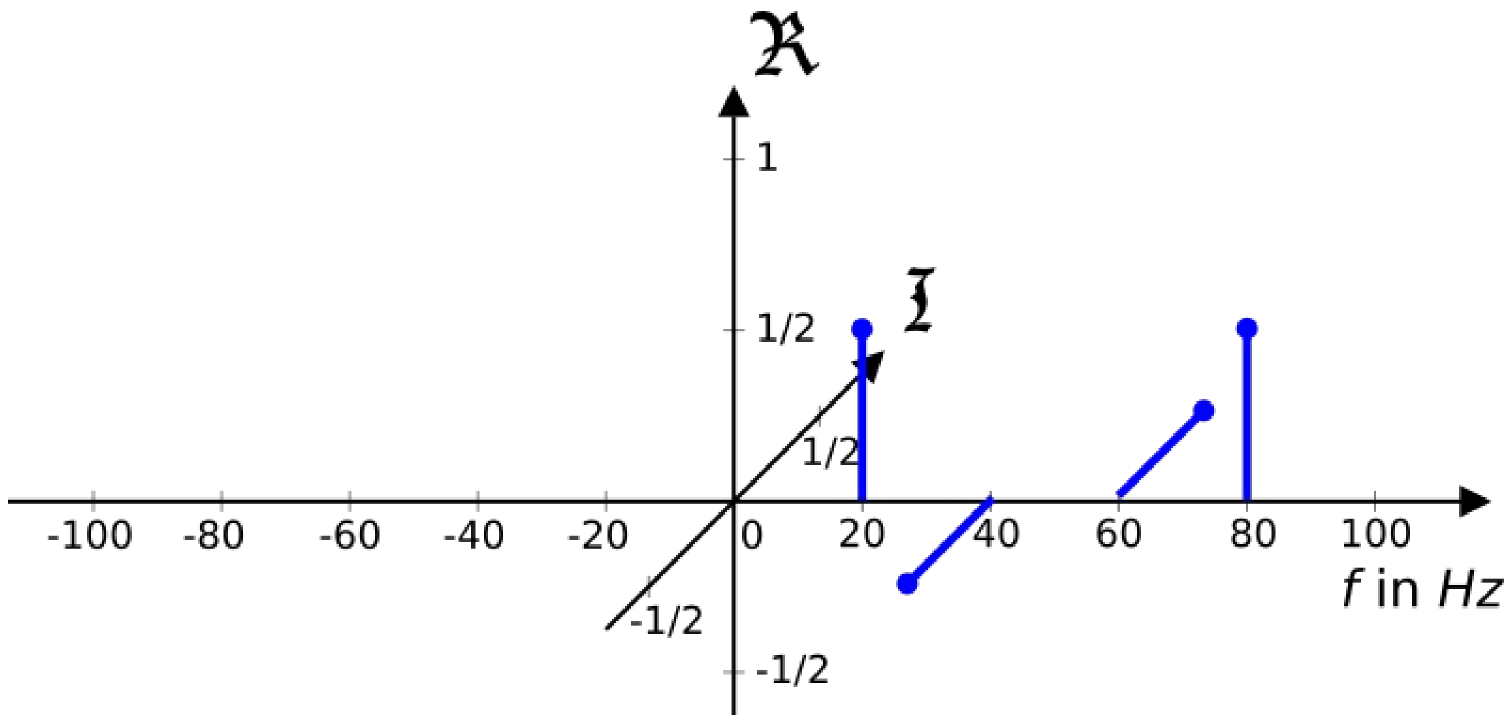
- Verschiebung um 80 Hz



$$(F * \delta)(f_o = 80) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{2T}$$
$$(F * \delta)(f_o = -20) = (F * \delta)(f_o = 80) = (F * \delta)(f_o = 180)$$

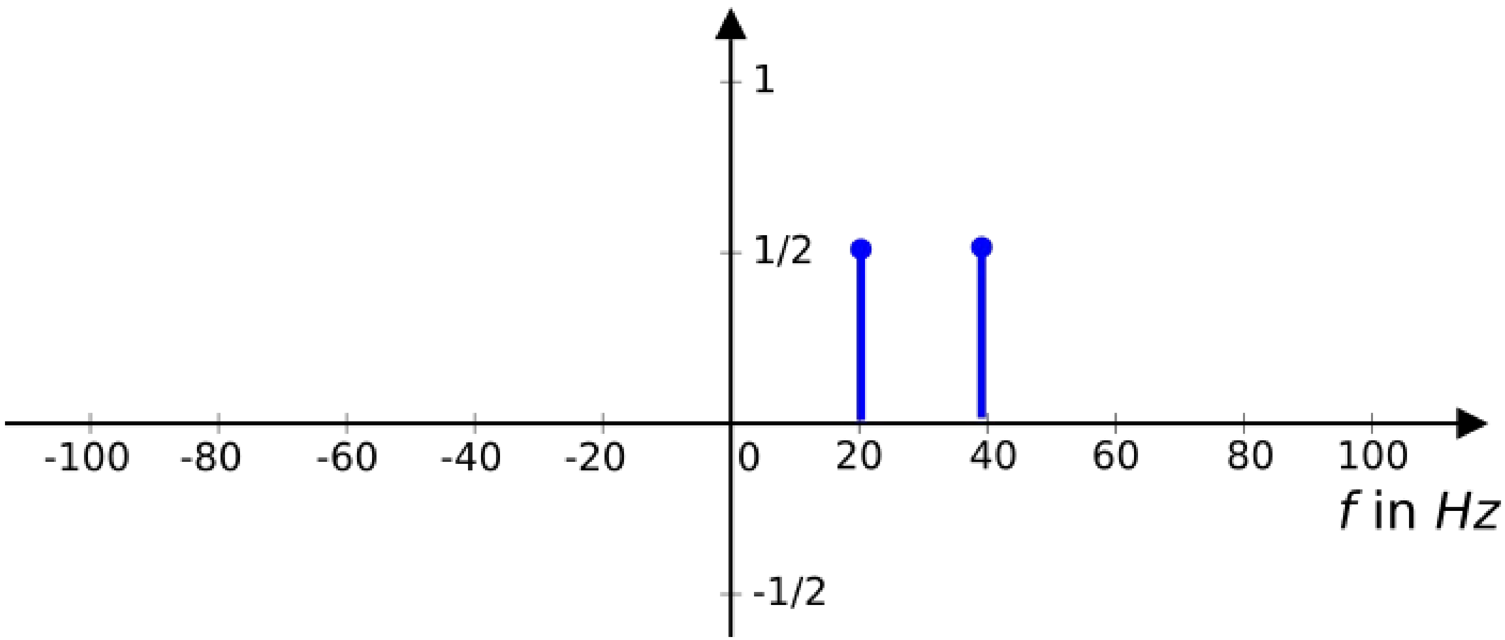
Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
c) Abtastung mit 100 Hz

- komplexes Spektrum nach der Abtastung



Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
c) Abtastung mit 100 Hz

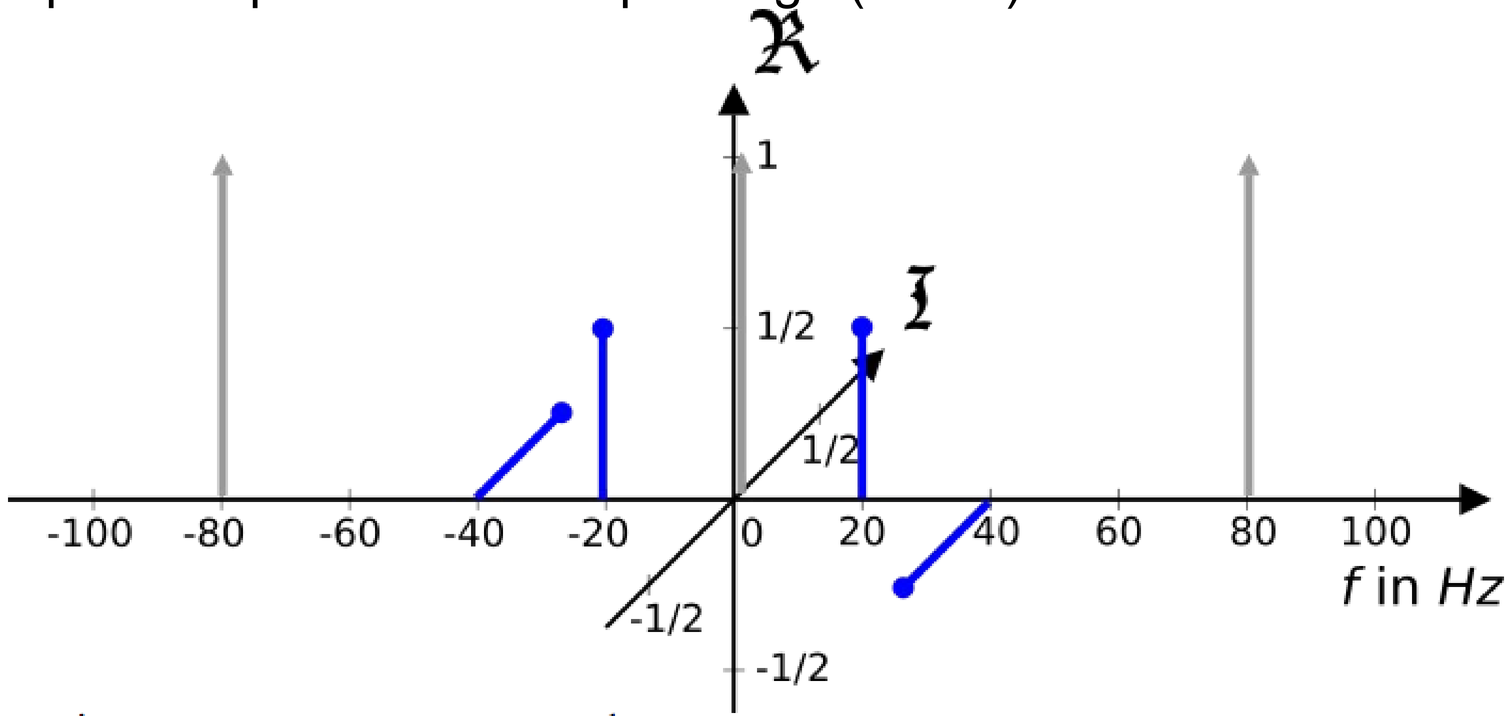
- Betragsspektrum nach der Abtastung (ohne wiederholte Frequenzen)



- Aliasing mit ausreichend hoher Abtastrate **verhindert**

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
d) Abtastung mit 80 Hz

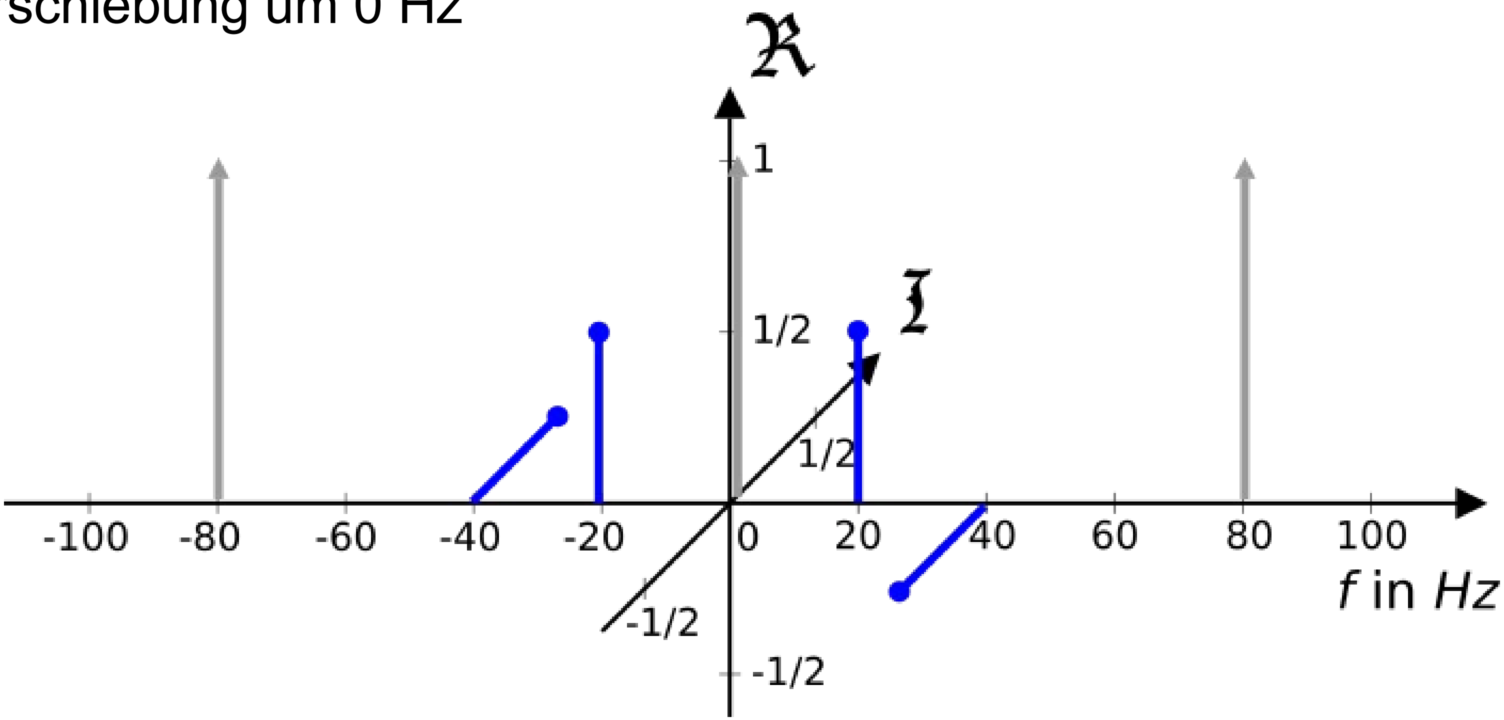
- komplexes Spektrum und Impulsfolge (80 Hz)



$$
\begin{aligned}
F(f) &= \frac{i}{2}\cdot(\delta(f+40)-\delta(f-40))+\frac{1}{2}\cdot(\delta(f+20)+\delta(f-20)) \\
&= \frac{i}{2}\cdot\delta(f+40)-\frac{i}{2}\cdot\delta(f-40)+\frac{1}{2}\cdot\delta(f+20)+\frac{1}{2}\cdot\delta(f-20)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
d) Abtastung mit 80 Hz

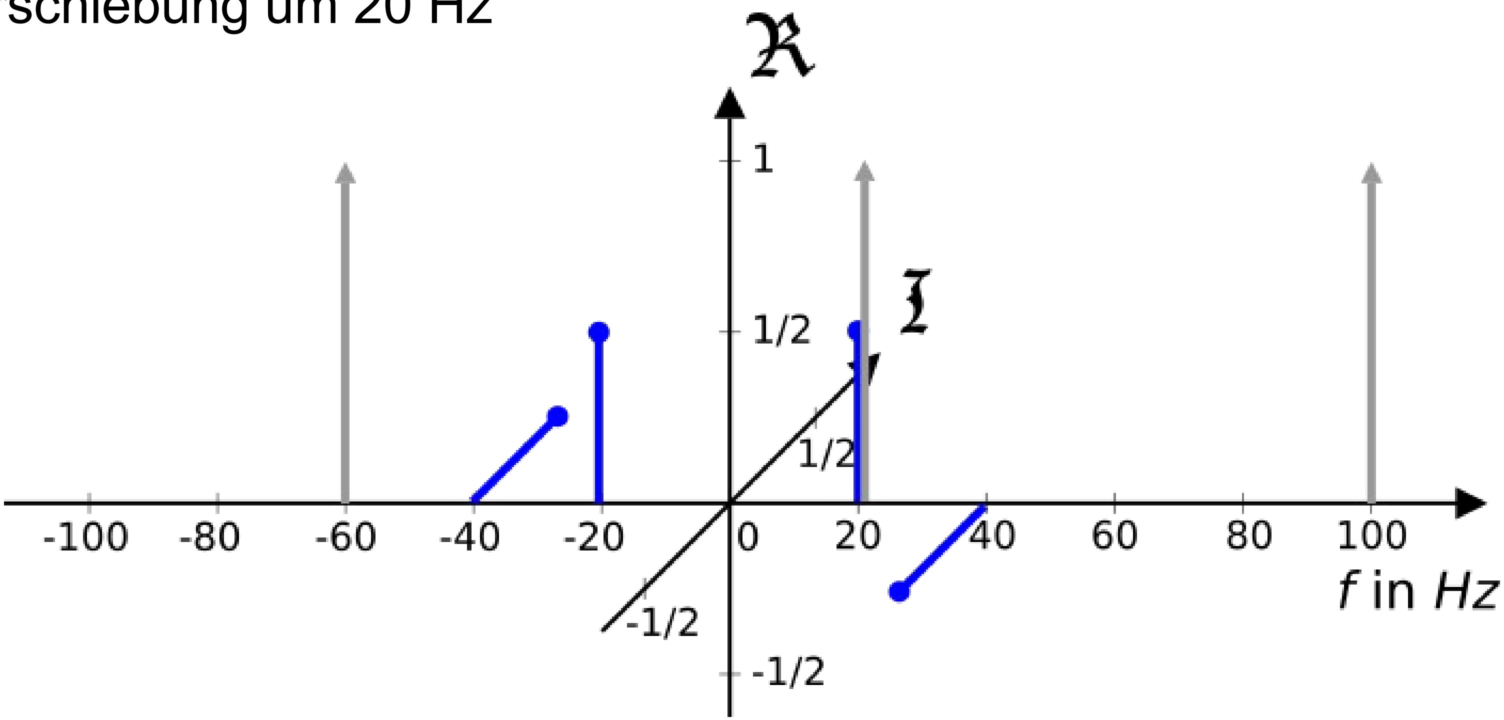
- Verschiebung um 0 Hz



$$F(0) * \delta(0) = 0$$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
d) Abtastung mit 80 Hz

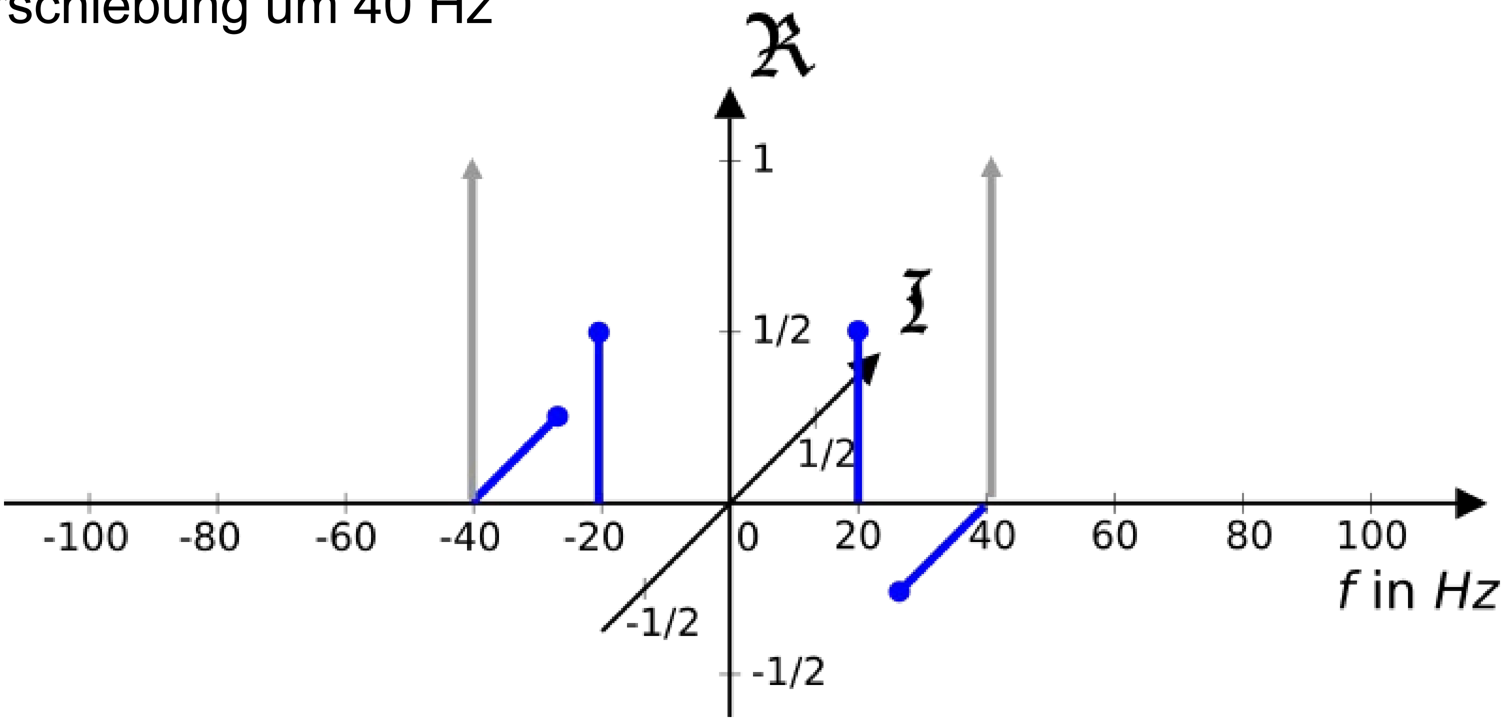
- Verschiebung um 20 Hz



$$(F * \delta)(f_o = 20) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{2T}$$
$$(F * \delta)(f_o = -60) = (F * \delta)(f_o = 20) = (F * \delta)(f_o = 100)$$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
d) Abtastung mit 80 Hz

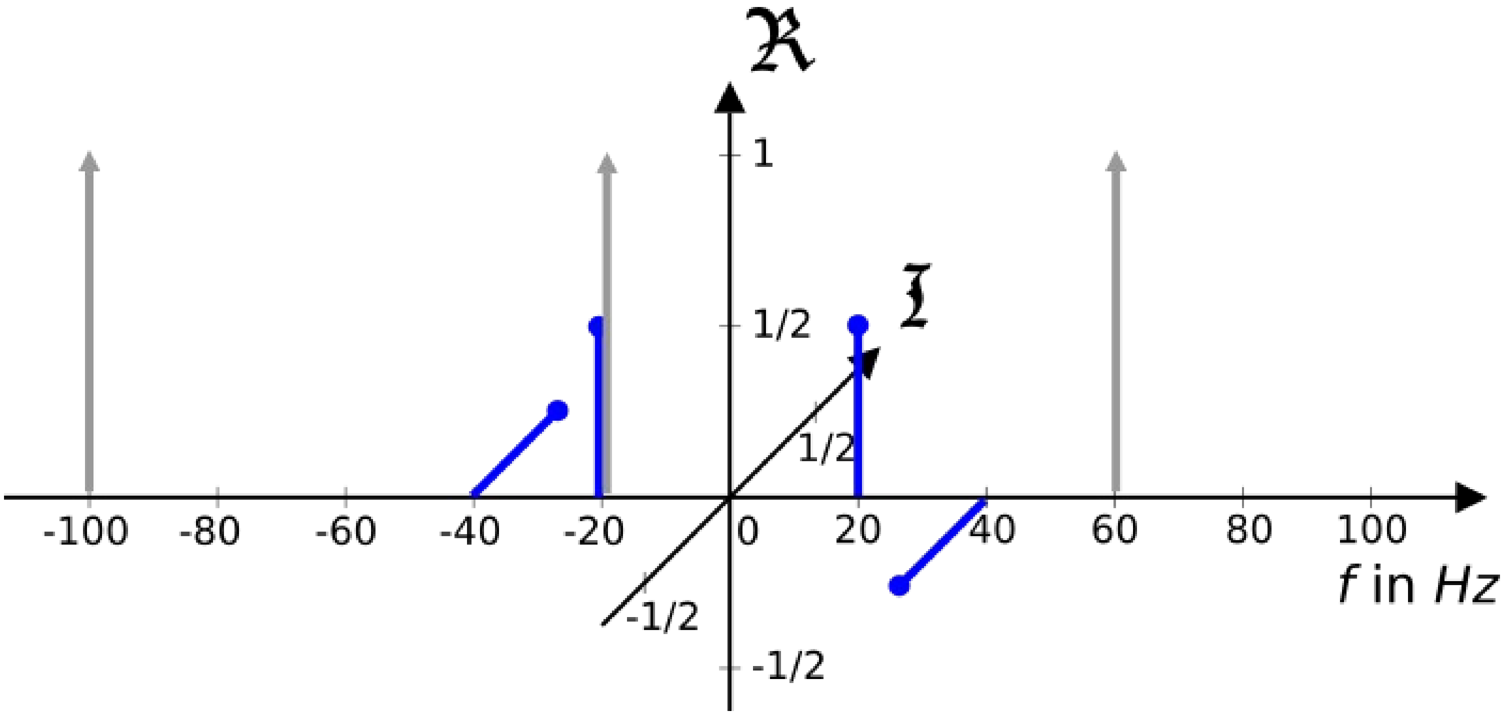
- Verschiebung um 40 Hz



$$(F * \delta)(f_o = 40) = \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{T} - \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{T} = 0$$
$$(F * \delta)(f_o = -40) = (F * \delta)(f_o = 40) = (F * \delta)(f_o = 120)$$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
d) Abtastung mit 80 Hz

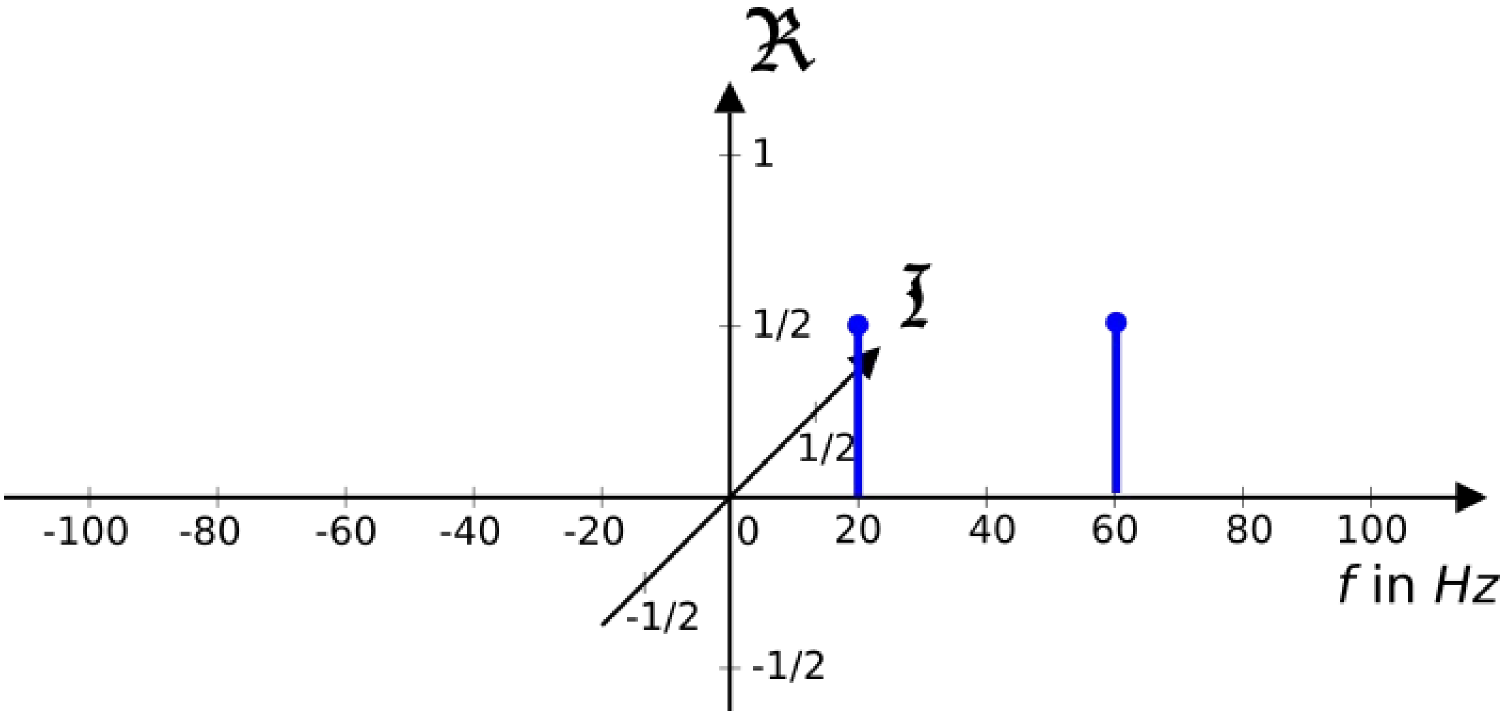
- Verschiebung um 60 Hz



$$(F * \delta)(f_o = 60) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{2T}$$
$$(F * \delta)(f_o = -20) = (F * \delta)(f_o = 60) = (F * \delta)(f_o = 140)$$

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
d) Abtastung mit 80 Hz

- komplexes Spektrum nach der Abtastung

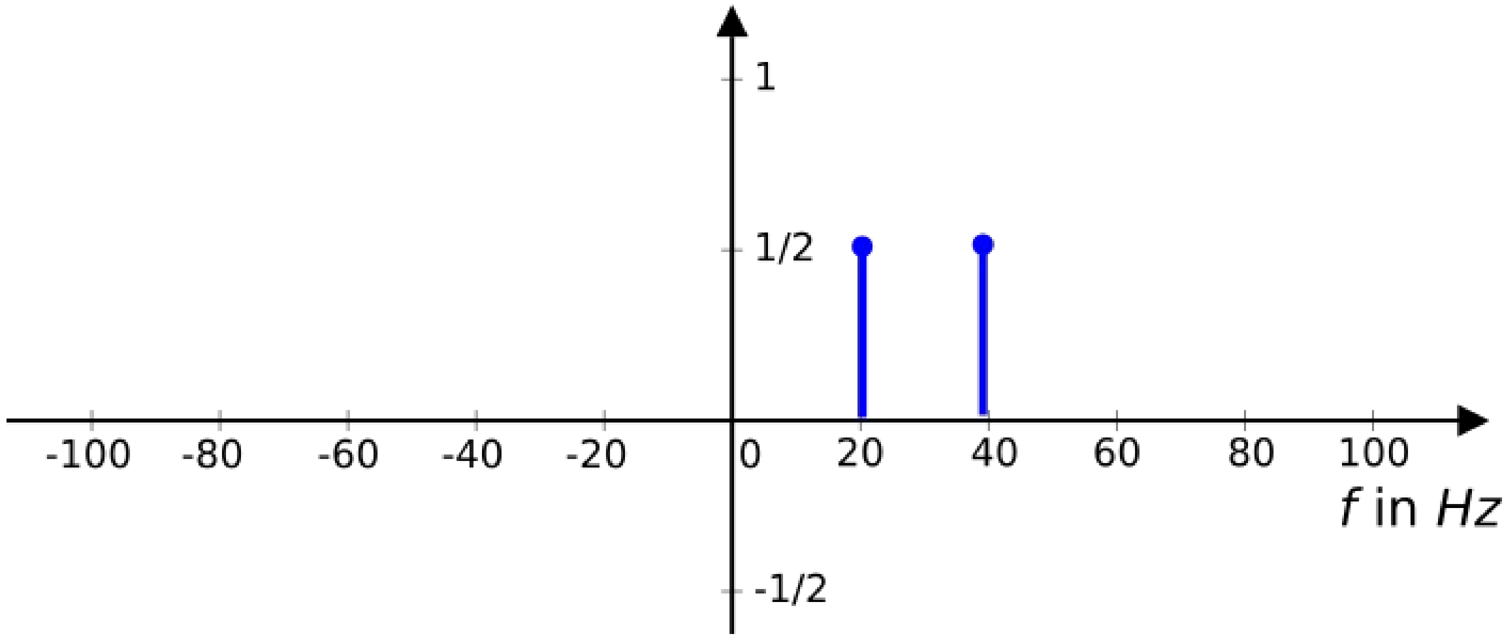


- Auslöschen der Frequenzen bei 40 Hz
  → 80 Hz sind nicht genug!

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen
Onlinefrage Nr. 2

- **Tritt Aliasing in Teilaufgabe c) auf? Nein.**

$$f(x) = \sin(2\pi 40 t) + \cos(2\pi 20 t)$$

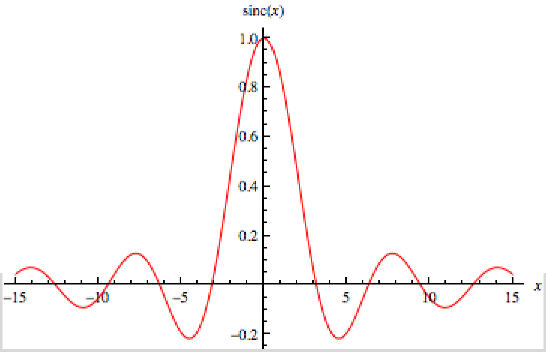


Aufgabe 3: Filtern
a)

- Die gegebene Funktion ist $v(t) = \pi \cdot \delta(t) - \frac{\sin(3\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)}{t}$
- Hinweise:
  - $f(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ entspricht $f(t) = \mathrm{sinc}(t)$
  - Fouriertransformierte von $g(t) = \mathrm{sinc}(at)$ ist:

$$G(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right) \text{ mit } \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2} \\ 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Um welchen Filter handelt es sich?



Aufgabe 3: Filtern
a)

- Umformen:

$$\begin{aligned} v(t) &= \pi\delta(t) - \frac{\sin(3\omega_o t) - \sin(\omega_o t)}{t} \\ &= \pi\delta(t) - \left(\frac{3\omega_o \sin(3\omega_o t)}{3\omega_o t} - \frac{\omega_o \sin(\omega_o t)}{\omega_o t}\right) \\ &= \pi\delta(t) - \left(3\omega_o \frac{\sin(3\pi\frac{\omega_o}{\pi}t)}{3\pi\frac{\omega_o}{\pi}t} - \omega_o \frac{\sin(\pi\frac{\omega_o}{\pi}t)}{\pi\frac{\omega_o}{\pi}t}\right) \\ &= \pi\delta(t) - \left(3\omega_o \mathtt{sinc}\left(\frac{3\omega_o}{\pi}t\right) - \omega_o \mathtt{sinc}\left(\frac{\omega_o}{\pi}t\right)\right) \end{aligned}$$

- Unter Ausnutzung von: $\mathtt{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

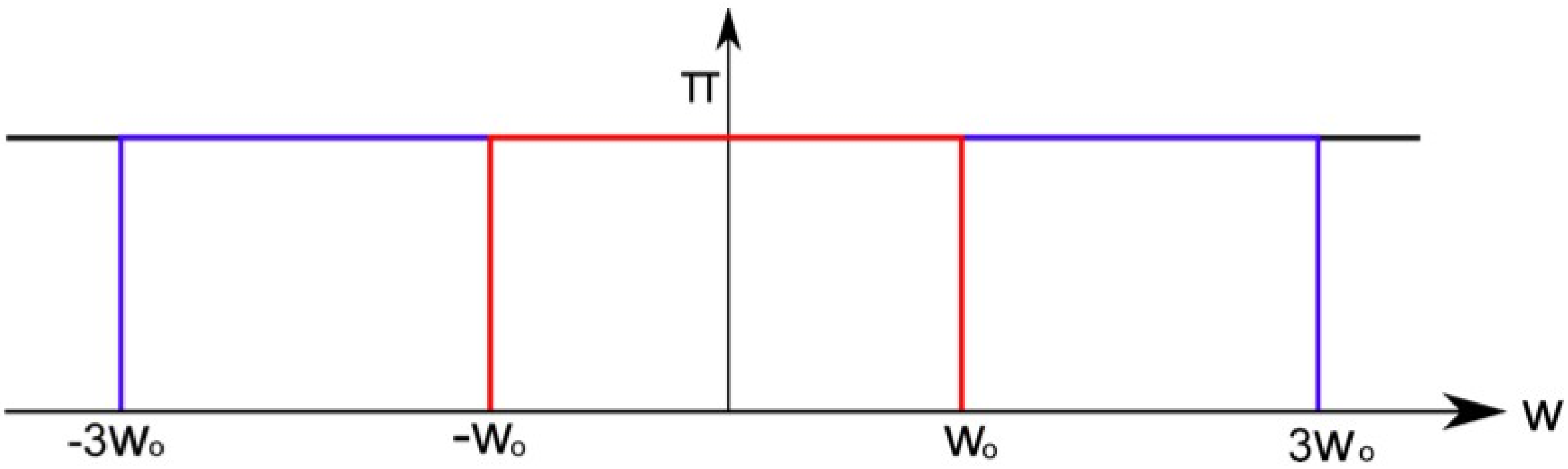
Aufgabe 3: Filtern
a)

- $V(\omega) = F(v(t)) = F(\pi\delta(t) - (3\omega_o \mathtt{sinc}(\frac{3\omega_o}{\pi}t) - \omega_o \mathtt{sinc}(\frac{\omega_o}{\pi}t)))$

$$\begin{aligned}
V(\omega) &= \pi \cdot 1 - (3\omega_o \frac{1}{|\frac{3\omega_o}{\pi}|} \mathtt{rect}(\frac{\omega}{2\pi\frac{3\omega_o}{\pi}}) - \omega_o \frac{1}{|\frac{\omega_o}{\pi}|} \mathtt{rect}(\frac{\omega}{2\pi\frac{\omega_o}{\pi}})) \\
&= \pi - (3\omega_o \frac{\pi}{3\omega_o} \mathtt{rect}(\frac{\omega}{6\omega_o}) - \omega_o \frac{\pi}{\omega_o} \mathtt{rect}(\frac{\omega}{2\omega_o})) \\
&= \pi - (\pi \mathtt{rect}(\frac{\omega}{6\omega_o}) - \pi \mathtt{rect}(\frac{\omega}{2\omega_o})) \\
&= \pi - \pi \mathtt{rect}(\frac{\omega}{6\omega_o}) + \pi \mathtt{rect}(\frac{\omega}{2\omega_o})
\end{aligned}$$

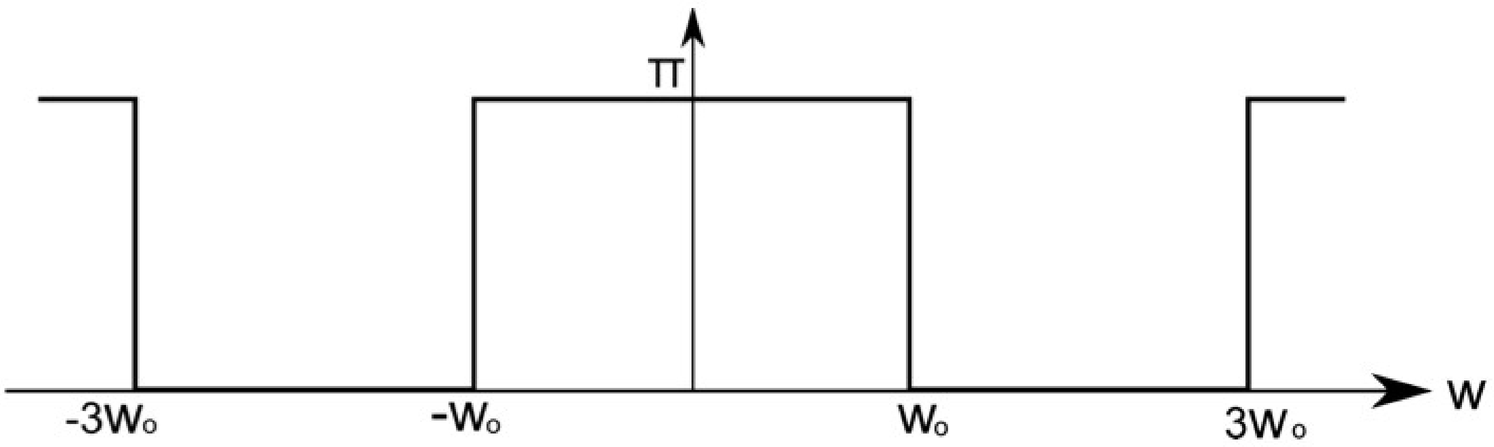
Aufgabe 3: Filtern
a)

$$V(\omega) = \pi - \pi \mathrm{rect}(\frac{\omega}{6\omega_o}) + \pi \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\omega_o})$$



Aufgabe 3: Filtern
a)

- Um welchen Filter handelt es sich? Bandsperre (Antwort d)



Aufgabe 4: Diskrete Fourier Transformation
a)

N Werte	Samplingrate	Grenz-frequenz	Frequenz-auflösung	Zeitauflösung
100	1000 Hz	500 Hz	10 Hz	0.1 s
100	100 Hz	50 Hz	1 Hz	1 s
100	10 Hz	5 Hz	0.1 Hz	10 s
?	22 000 Hz		10 Hz	

Aufgabe 4: Diskrete Fourier Transformation
a)

N Werte	Samplingrate	Grenz-frequenz	Frequenz-auflösung	Zeitauflösung
100	1000 Hz	500 Hz	10 Hz	0.1 s
100	100 Hz	50 Hz	1 Hz	1 s
100	10 Hz	5 Hz	0.1 Hz	10 s
?	22 000 Hz	22000/2 = 11000	10 Hz	

Aufgabe 4: Diskrete Fourier Transformation
a)

N Werte	Samplingrate	Grenz-frequenz	Frequenz-auflösung	Zeitauflösung
100	1000 Hz	500 Hz	10 Hz	0.1 s
100	100 Hz	50 Hz	1 Hz	1 s
100	10 Hz	5 Hz	0.1 Hz	10 s
2200	22 000 Hz	22000/2 = 11000	10 Hz	

Aufgabe 4: Diskrete Fourier Transformation
a)

N Werte	Samplingrate	Grenz-frequenz	Frequenz-auflösung	Zeitauflösung
100	1000 Hz	500 Hz	10 Hz	0.1 s
100	100 Hz	50 Hz	1 Hz	1 s
100	10 Hz	5 Hz	0.1 Hz	10 s
2200	22 000 Hz	22000/2 = 11000	10 Hz	1/10 = 0.1 s

Aufgabe 4: Diskrete Fourier Transformation

a)

- Onlinefrage 4: Antwort = 100ms